

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

9 класс. Вариант 1

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

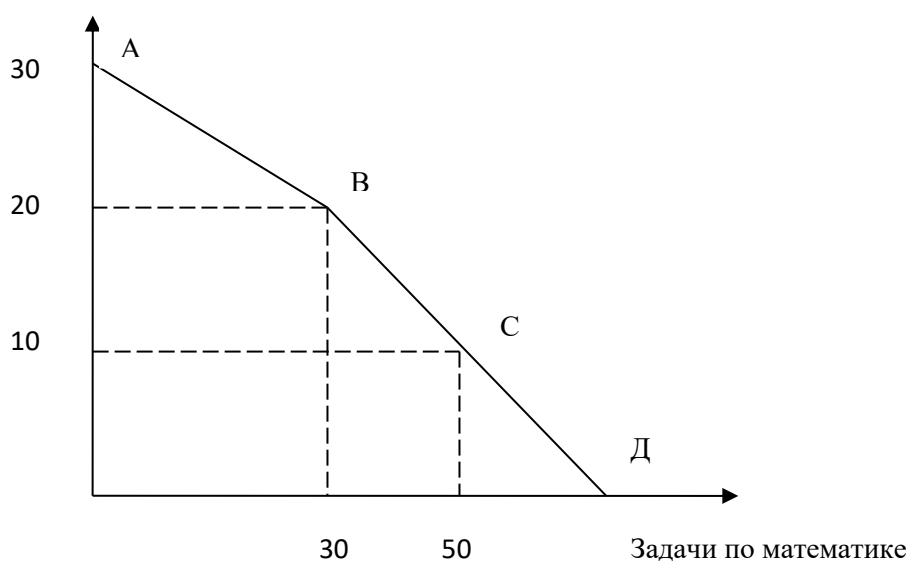
Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае - меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. (20 баллов) «Зимняя сессия»

Друзья Роман и Антон обучаются в инженерном классе Экономического лицея и готовятся к экзаменам Зимней сессии. Они решают задачи по физике и математике. На рисунке представлена кривая производственных возможностей (КПВ) друзей (на осях – количество задач по физике и математике, которое они могут решить за день).

Задачи по физике



- 1) Какое наибольшее количество задач по математике могут решить вместе Роман и Антон?
- 2) Какова альтернативная стоимость решения 1 задачи по физике у Антона, если он может решить за день задач по физике больше, чем Роман?
- 3) Друзья решили в ходе подготовки к экзаменам 50 задач по математике. Сколько они решили задач по физике? (Укажите, какие и сколько задач решает каждый из друзей).

Решение:

Представим данные КПВ в виде таблицы:

	Решение задач за день		Альтернативная стоимость	
	по математике	по физике	1 задачи по математике	1 задачи по физике
Роман	30	10	0,33	3
Антон	40	20	0,5	2
	70	30		

1) По решению задач по физике у Антона преимущество, значит участок ВД принадлежит Антону.

Тогда Роман первый начинает решать задачи по математике (30), отказываясь от 10 задач по физике.

Отрезок ВС находится на участке линейной КПВ, принадлежащей Антону. При увеличении решения задач по физике с 10 до 20 придется отказаться от решения 20 (50-30) задач по математике. Альтернативная стоимость 1 задачи по физике для Антона на этом участке составит $20/10=2$ задачи по математике. Значит значение координаты точки Д (70;0), т.к. отказавшись от решения всех задач по физике максимально можно решить 70 задач по математике

Наибольшее количество задач по математике, которое могут решить вместе друзья равно 70 (Антон 40 задач и Роман 30) (за обоснованные выводы 10 баллов. Обоснование также может быть проведено графически или через составление уравнения прямой на участке отрезка ВД).

2) Альтернативная стоимость 1 задачи по физике для Антона составит $20/10=2$ задачи по математике (за обоснование при любом решении 5 баллов).

3) 50 задач по математике соответствует точке С на графике, а значит по физике будет решено 10 задач.

Друзья решили 10 задач по физике. Антон решает 20 задач по математике и 10 задач по физике ($20/2 = 10$), Роман будет решать только задачи по математике и решит 30 задач (5 баллов).

Ответ:

1) максимально 70 задач по математике.

2) Альтернативная стоимость решения 1 задачи по физике равна 2 задачи по математике.

3) 10 задач по физике.

Задача 2. (20 баллов) «Успешный бизнес»

Чтобы организовать собственную торговую фирму, г-жа Загравская М.А. оставила работу менеджера с окладом 25 000 руб./мес. Половину необходимых складских помещений она арендует за 300 000 руб. в год, а в качестве недостающих площадей приспособила часть своего дома. Покупка оборудования со сроком службы в 5 лет обошлась ей в 500 000 руб. Годовой фонд заработной платы на ее фирме – 1 200 000 руб. Для организации дела она использует 2 000 000 руб. собственных сбережений, а недостающие для создания товарных запасов 4 500 000 руб. берет в кредит под 20%. Процент по вкладам - 10% годовых. Годовая выручка – 7 800 000 руб.

1. Какова ее экономическая прибыль за год?

2. Какое решение она примет о продолжении бизнеса (продолжить или завершить его)?

Решение:

1) Экономическая прибыль (Π) = Общая выручка (TR) - Общие издержки (ТС)
где $ТС = ТС_6 + ТС_н$ (бухгалтерские издержки + неявные издержки)

Бухгалтерские издержки:

$ТС_6 = 300$ (аренда) + $500/5$ (амортизация) + $1200(ЗП)$ + $4500 \times 0,2$ (процент по кредиту) + 4500 (товары) = 7000 тыс. руб. (5 баллов, по 1 баллу за каждую статью затрат).

Все ее сбережения израсходованы для организации дела:

300 (аренда) + 500 (оборудование) + 1200 (ЗП) = 2000 тыс. руб.

Неявные издержки – издержки упущенных возможностей, неполученный доход:

$ТС_н = 25 \times 12$ (ее ЗП) + 300 (аренда ее дома) + $2000 \times 0,1$ (процент по депозитам) = 800 тыс. руб. (6 баллов, по 2 балла за каждую статью затрат).

$$TC = 7000 + 800 = 7800 \text{ тыс. руб. (2 балла).}$$

$$\text{Экономическая прибыль} = 7800 - 7800 = 0. \text{ (2 балла).}$$

2) Она компенсирует все свои экономические издержки, значит, будет продолжать бизнес (за правильный вывод 5 баллов).

Ответ: 1) Экономическая прибыль = 0;

2) Решение предпринимателя - продолжить бизнес.

Задача 3. (20 баллов) «Чудеса Чудесного»

В городе Чудесном предложение новогодних елок описывается функцией $Q_s = 20P + 2400$. Совет города решил 31 декабря поддержать продавцов елок и выделил субсидию 100 еловиков на каждое проданное дерево (еловик – местная валюта). Спрос на новогодние ели представлен функцией $Q_d = 12000 - 20P$.

Другой альтернативой использования бюджетных средств острова рассматривался вопрос проведения праздничного фейерверка. Однако, на основании проведенных расчетов совета по экономическим вопросам Чудесного, Совет острова отклонил данное предложение, ссылаясь на дефицит бюджета.

1. Определите равновесную цену и количество проданных новогодних елей до введения субсидии.

2. Как изменился объем продаж праздничных елей после введения субсидии?

3. В какую сумму обошлась бюджету острова благотворительная деятельность?

Решение:

1. До введения субсидии равновесие на рынке новогодних елей установилось на уровне:

$$12000 - 20P = 20P + 2400$$

$$P = 240 \text{ еловиков}$$

$$Q = 7200 \text{ елей. (5 баллов).}$$

2. При введении правительственной дотации (субсидии) покупатель будет платить меньше, чем получит продавец на величину субсидии:

$$P_{\text{продавца}} = P_{\text{покупателя}} + \text{Субсидия}$$

$$P_{\text{продавца}} = P_{\text{покупателя}} + 100$$

$$12000 - 20P_{\text{покупателя}} = 20(P_{\text{покупателя}} + 100) + 2400$$

$$P_{\text{покупателя}} = 190 \text{ еловиков}$$

$$Q = 12000 - 20 \times 190 = 8200 \text{ елей.}$$

Объем продаж увеличился на 1000 елей ($8200 - 7200$) (10 баллов).

3. Субсидирование продажи праздничных елей обошлось бюджету острова Чудесный в 820000 еловиков (8200×100) (5 баллов).

Ответ: 1. $P = 240$ еловиков, $Q = 7200$ елей.

2. увеличился на 1000 елей.

3. 820000 еловиков.

Задача 4. (20 баллов) «Пазлы»

Мама купила пазлы. Арина и Кирилл, посмотрев картинку, решили, что вдвоём они соберут её за 9 часов. Так как у Арины домашних обязанностей и школьных заданий меньше, чем у Кирилла, она начала собирать пазлы одна. Когда Арина уже выполнила $2/3$ работы, её позвала мама помогать готовить ужин, а Кирилл закончил уроки и принялся за картину. В этот день закончить работу не удалось. Картину по разным причинам пришлось заканчивать Кириллу. В результате на сборку ушло 28 часов.

Сколько часов ушло бы у Арины и Кирилла по отдельности, если производительность у Арины больше, чем у Кирилла?

Решение. Пусть за x часов Арина может собрать картину, а Кирилл - за y часов. Тогда $9/x+9/y=1$. Учитывая части выполненной работы Ариной и Кириллом, получим: $2x/3+y/3=28$ получим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9y+9x=xy, \\ 2x+y=84. \end{cases}$$

Из второго уравнения $y=84-2x$, подставим в первое и получим:
 $9(84-2x)+9x=x(84-2x), \Rightarrow 9x+756-18x=84x-2x^2, \Rightarrow 2x^2-93x+756=0$, Решив

квадратное уравнение, получим: $D=2601$, $x_1=36$, $x_2=10,5$.

Тогда $y_1=12$, $y_2=63$.

(за составление и решение системы уравнений 14 баллов).

Так как производительность Арины выше производительности Кирилла, то времени у Арины ушло бы меньше, чем у Кирилла **(6 баллов за правильный вывод).**

Ответ: Арина соберет пазлы за 10,5 часов, а Кирилл за 63 часа.

Задача 5. (20 баллов) «Производство кофе в Ижевске»

Ижевская компания «Testy coffee» по производству кофе, приобретает зеленые зерна кофе сортов робуста и арабика, обжаривает их в ростерах и продает на рынке упаковками по 250 грамм.

Для сохранения свежести до момента обжарки зеленое зерно кофе хранится на специализированном складе, при постоянной температуре +18 градусов и влажности 55%, что соответствует влажности самого сырья.

Для изготовления каждой упаковки эспрессо-смеси, используется 25% кофейных зерен робусты и 75% зерен арабики. После обжарки в зерна робусты содержат 37% влажности, а арабики 28%.

А) Какое количество зеленого сырья необходимо для производства партии в 40 тыс. упаковок?

Б) Рассчитайте, какую прибыль получит «Testy coffee» с продажи партии упаковок, если цена за 1 кг зеленой робусты 650 руб., за 1 кг, зеленой арабики 870 руб., а цена упаковки эспрессо-смеси 459 руб., без учета прочих затрат.

Решение:

А) Для изготовления 1 кг эспрессо смеси необходимо использовать $1000*0,25=250$ гр. робуста и $1000*0,75=750$ гр. арабика **(2 балла).**

Если в обжаренном зерне робуста 37% влажности, а в зеленом 55%, то $250*(1-0,37)=157,5$ гр. сух. вещества в жареной робусте, $157,5:0,45=350$ гр. вес робусты в смеси до обжарки **(4 балла).**

В обжаренной арабике влажности 28%, а в зеленой 55%, то $750*(1-0,28)=540$ гр. сух. вещества в обжаренной арабике, $540:0,45=1200$ гр. вес арабики в смеси до обжарки **(4 балла).**

Для изготовления 1 кг. эспрессо-смеси необходимо $350+1200=1550$ гр. зеленого зерна. На изготовление одной упаковки, соответственно $87,5+300=387,5$ гр. зеленого сырья. Для изготовления 40 тыс. упаковок необходимо:

$40000*87,5=3500000$ гр. или 3500 кг робусты.

$40000*300=12000000$ гр. или 12000 кг арабики.

Всего 15500000 гр. или 15500 кг. зеленого сырья. **(4 балла).**

Б) Прибыль = Выручка – Затраты

Затраты на робусту = $650*3500 = 2275000$ руб.

Затраты на арабику = $870*12000 = 10440000$ руб.

Всего затраты на сырье = 12715000 руб. **(3 балла).**

Выручка = $459*40000 = 18360000$ руб.

Прибыль = $18360000 - 12715000 = 5645000$ руб. **(за правильный расчет выручки и прибыли 3 балла).**

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

9 класс. Вариант 2

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае - меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. (20 баллов) «Производство кофе в Ижевске»

Ижевская компания «Testy coffee» по производству кофе, приобретает зеленые зерна кофе сортов робуста и арабика, обжаривает их в ростерах и продает на рынке упаковками по 250 грамм.

Для сохранения свежести до момента обжарки зеленое зерно кофе хранится на специализированном складе, при постоянной температуре +18 градусов и влажности 55%, что соответствует влажности самого сырья.

Для изготовления каждой упаковки эспрессо-смеси, используется 25% кофейных зерен робусты и 75% зерен арабики. После обжарки в зерна робусты содержат 37% влажности, а арабики 28%.

А) Какое количество зеленого сырья необходимо для производства партии в 40 тыс. упаковок?

Б) Рассчитайте, какую прибыль получит «Testy coffee» с продажи партии упаковок, если цена за 1 кг зеленой робусты 650 руб., за 1 кг, зеленой арабики 870 руб., а цена упаковки эспрессо-смеси 459 руб., без учета прочих затрат.

Решение:

А) Для изготовления 1 кг эспрессо смеси необходимо использовать $1000 \cdot 0,25 = 250$ гр. робуста и $1000 \cdot 0,75 = 750$ гр. арабика (2 балла).

Если в обжаренном зерне робуста 37% влажности, а в зеленом 55%, то $250 \cdot (1 - 0,37) = 157,5$ гр. сух. вещества в жареной робусте, $157,5 : 0,45 = 350$ гр. вес робусты в смеси до обжарки (4 балла).

В обжаренной арабике влажности 28%, а в зеленой 55%, то $750 \cdot (1 - 0,28) = 540$ гр. сух. вещества в обжаренной арабике, $540 : 0,45 = 1200$ гр. вес арабики в смеси до обжарки (4 балла).

Для изготовления 1 кг. эспрессо-смеси необходимо $350 + 1200 = 1550$ гр. зеленого зерна. На изготовление одной упаковки, соответственно $87,5 + 300 = 387,5$ гр. зеленого сырья. Для изготовления 40 тыс. упаковок необходимо:

$40000 \cdot 87,5 = 3500000$ гр. или 3500 кг робусты; $40000 \cdot 300 = 12000000$ гр. или 12000 кг арабики. Всего 15500000 гр. или 15500 кг. зеленого сырья. (4 балла).

Б) Прибыль = Выручка – Затраты

Затраты на робусту = $650 \cdot 3500 = 2275000$ руб.

Затраты на арабику = $870 \cdot 12000 = 10440000$ руб.

Всего затраты на сырье = 12715000 руб. (3 балла).

Выручка = $459 \cdot 40000 = 18360000$ руб.

Прибыль = $18360000 - 12715000 = 5645000$ руб. (за правильный расчет выручки и прибыли 3 балла).

Задача 2 (20 баллов) "Кредит для семьи Петровых"

Семья Петровых собирается купить новый автомобиль, на его покупку им не хватает 100 000 рублей. На семейном совете было принято решение взять в банке кредит сроком на один год по ставке 15.0% годовых.

Банк предлагает Петровым 2 варианта погашения кредита:

- Вариант 1. Погашение всей суммы основного долга и процентов по нему единовременно в конце срока кредита – через 1 год.
- Вариант 2. Погашение остатка основного долга и процентов осуществляется в конце каждого квартала. При этом остаток основного долга кредита погашается равными платежами.

Какой вариант погашения кредита более выгоден Петровым?

Решение:

Вариант 1.

Процент по I Варианту = $(100\ 000 * 15\%) / 100\% = 15\ 000,0$
 $100\ 000 + 15\ 000 = 115\ 000$ рублей общая сумма долга (4 балла).

Вариант 2.

Процент за квартал = $15\% / 4 = 3,75\%$
Процент за 1 квартал в рублях = $(100\ 000 * 3,75\%) / 100\% = 3750,0$
Процент за 2 квартал в рублях = $(75\ 000 * 3,75\%) / 100\% = 2812,5$
Процент за 3 квартал в рублях = $(50\ 000 * 3,75\%) / 100\% = 1875,0$
Процент за 4 квартал в рублях = $(25\ 000 * 3,75\%) / 100\% = 937,5$
Процент по II Варианту = $3750,0 + 2812,5 + 1875,0 + 937,5 = 9375,0$
 $100\ 000 + 9375 = 109\ 375$ рублей общая сумма долга (14 баллов).

(2 балла за правильный вывод).

Ответ: Петровым выгодно согласиться на второй вариант.

Задача 3. (20 баллов) «Розы для мамы»

На рынке цветов города Соловьёвск функции спроса и предложения являются линейными. В канун празднования дня Матери, ситуация такова, что при цене 20 рублей покупатели готовы были купить 40 тыс. роз, а продавцы согласны были продать 10 тыс. роз; по цене 60 рублей – 20 и 30 тыс. штук соответственно.

Если решением местных органов власти, в канун праздника, будет установлена максимальная цена в 40 рублей, какой совокупный доход получают продавцы?

Решение:

Общий вид линейной функции спроса (предложения) $Q = a + bP$.

Функцию спроса можно определить из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 40 = a + 20b \\ 20 = a + 60b, b = -0,5, a = 50, Q_d = 50 - 0,5P \end{cases} \text{ (5 баллов).}$$

Функцию предложения можно определить из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 10 = a + 20b \\ 30 = a + 60b, b = 0,5, a = 0, Q_s = 0,5P \end{cases} \text{ (5 баллов).}$$

При $P = 40$, $Q_d = 50 - 0,5 \times 40 = 30$ тыс. штук., $Q_s = 0,5 \times 40 = 20$ тыс. штук.

Следовательно, на рынке возникает дефицит цветов к празднику (5 баллов).

Допускается графическое решение, дефицит = 10 тыс. штук (15 баллов).

В условиях дефицита объем продаж определяется величиной предложения.

Поэтому доходы продавцов равны $20 \times 40 = 800$ тыс. рублей (5 баллов).

Ответ: 800 тыс. рублей получают продавцы.

Задача 4. (20 баллов) «Пазлы»

Мама купила пазлы. Арина и Кирилл, посмотрев картинку, решили, что вдвоём они соберут её за 9 часов. Так как у Арины домашних обязанностей и школьных заданий меньше, чем у Кирилла, она начала собирать пазлы одна. Когда Арина уже выполнила $\frac{2}{3}$ работы, её позвала мама помогать готовить ужин, а Кирилл закончил уроки и принялся за картину. В этот день закончить работу не удалось. Картину по разным причинам пришлось заканчивать Кириллу. В результате на сборку ушло 28 часов.

Сколько часов ушло бы у Арины и Кирилла по отдельности, если производительность у Арины больше, чем у Кирилла?

Решение. Пусть за x часов Арина может собрать картину, а Кирилл - за y часов. Тогда $\frac{9}{x} + \frac{9}{y} = 1$. Учитывая части выполненной работы Ариной и Кириллом, получим: $\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} = 28$ получим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9y + 9x = xy, \\ 2x + y = 84. \end{cases}$$

Из второго уравнения $y = 84 - 2x$, подставим в первое и получим:
 $9(84 - 2x) + 9x = x(84 - 2x), \Rightarrow 9x + 756 - 18x = 84x - 2x^2, \Rightarrow 2x^2 - 93x + 756 = 0,$ Решив

квадратное уравнение, получим: $D = 2601, x_1 = 36, x_2 = 10,5$.

Тогда $y_1 = 12, y_2 = 63$.

(за составление и решение системы уравнений 14 баллов).

Так как производительность Арины выше производительности Кирилла, то времени у Арины ушло бы меньше, чем у Кирилла **(6 баллов за правильный вывод).**

Ответ: Арина соберет пазлы за 10,5 часов, а Кирилл за 63 часа.

Задача 5. (20 баллов) «Собственное производство»

В магазине «Продсиб» продаются булочки собственного производства со следующими видами начинки: ягодная, творожная и маковая. В таблице приведены данные по себестоимости, отпускной цене и производственной мощности магазина по каждому виду продукции.

Булочки с начинкой	Себестоимость за 1 тонну, тыс. руб.	Отпускная цена за 1 тонну, тыс. руб.	Производственная мощность, тонн в месяц
ягода	70	100	90
творог	100	135	75
мак	80	110	80

Для выполнения условий ассортиментности, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн.

Предполагая, что вся продукция магазина реализуется без остатка, найдите максимально возможную прибыль, которую может получить магазин от производства булочек за 1 месяц.

Решение:

Расчет прибыли на тонну булочек, рентабельности производства и альтернативной стоимости:

Булочки с начинкой	Прибыль на одну тонну, тыс. руб.	Рентабельность производства, %	Альтернативная стоимость
ягода	$100 - 70 = 30$	$30/70 \times 100 = 42,86$	-
творог	$135 - 100 = 35$	$35/100 \times 100 = 35,00$	$90/75 = 1,2$
мак	$110 - 80 = 30$	$30/80 \times 100 = 37,5$	$90/80 = 1,125$

По данным расчетов видно, что наиболее выгодно производить булочки с ягодной начинкой (максимальная рентабельность). Для выполнения условия ассортиментной

политики магазина «Продсиб», булочек с творожной и маковой начинкой необходимо производить по 15 тонн.

Для обоснования объема производства булочек с ягодной начинкой дополнительно рассчитаем альтернативную стоимость производства булочек с творожной начинкой и с маком.

Альтернативная стоимость производства одной тонны булочек с творожной начинкой равна 1,2 тонны булочек с ягодной начинкой ($90/75=1,2$).

Альтернативная стоимость производства одной тонны булочек с маком равна 1,125 тонны булочек с ягодной начинкой ($90/80=1,125$).

(За правильный расчет прибыли 3 балла, рентабельности производства – 3 балла и альтернативной стоимости – 6 баллов).

Тогда, объем производства булочек с ягодной начинкой = $90 - 15*1,2 - 15*1,125 = 90 - 18 - 16,875 = 55,125$ тонны.

Прибыль магазина «Продсиб» от продажи булочек составит:

$$15*35 + 15*30 + 55,125*30 = 525 + 450 + 1653,75 = 2628,75 \text{ тыс. руб.}$$

(За правильные расчеты и обоснование получения прибыли - 8 баллов).

Ответ: 2628,75 тыс. рублей