

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

для учащихся 10-х классов

Время выполнения 180 минут**Всего за задачи 100 баллов****КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ**

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуются присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1 «Кузница» (20 баллов)

Небольшой средневековый город Э. жил в беспокойное время. Горожане знали, что существует угроза нападения на город враждебно настроенных соседей, поэтому решили собрать и вооружить войско из 500 сильных и смелых человек. В оружейных люди нашли лишь 300 арбалетов и 250 мечей. Каждый воин может иметь один арбалет и один меч одновременно. С другими городами г. Э. торговать не может. Городские кузнецы сказали, что могут выковать 100 мечей, если они используют весь имеющийся в городе запас металла. Кроме того, они сказали, что если отказаться от производства 10 мечей, то из неиспользованного металла можно сделать 50 арбалетов, если отказаться *еще* от 10 мечей, то можно сделать *еще* 45 арбалетов. Отказ от следующих 10 мечей дает прирост всего в 40 арбалетов, и так далее по той же закономерности и до тех пор, пока прирост количества арбалетов от того, что горожане отказались от производства мечей, не станет равен 0.

А) Постройте кривую производственных возможностей в координатах мечи-арбалеты. Сколько можно сделать арбалетов, если из имеющегося металла совсем не производить мечи? **(11 баллов)**

Б) **(6 баллов)** Городу доступны 4 комбинации производства мечей и арбалетов (А, В, С и D). С учетом всех вышеперечисленных данных определите, какие из комбинаций производства оружия будут эффективны для города **(2 балла)**? С учетом потребностей города в каждом виде оружия, какие из эффективных способов производства выберет город Э. **(2 балла)**

А. 40 мечей и 135 арбалетов

В. 40 мечей и 225 арбалетов

С. 170 арбалетов и 90 мечей

D. 95 арбалетов и 80 мечей

Объясните свой выбор **(2 балла)**.

В) Что необходимо изменить (в производстве мечей и арбалетов), чтобы выбранные неэффективные комбинации стали эффективными? Объясните, используя понятие альтернативной стоимости **(3 балла)**

Решение:

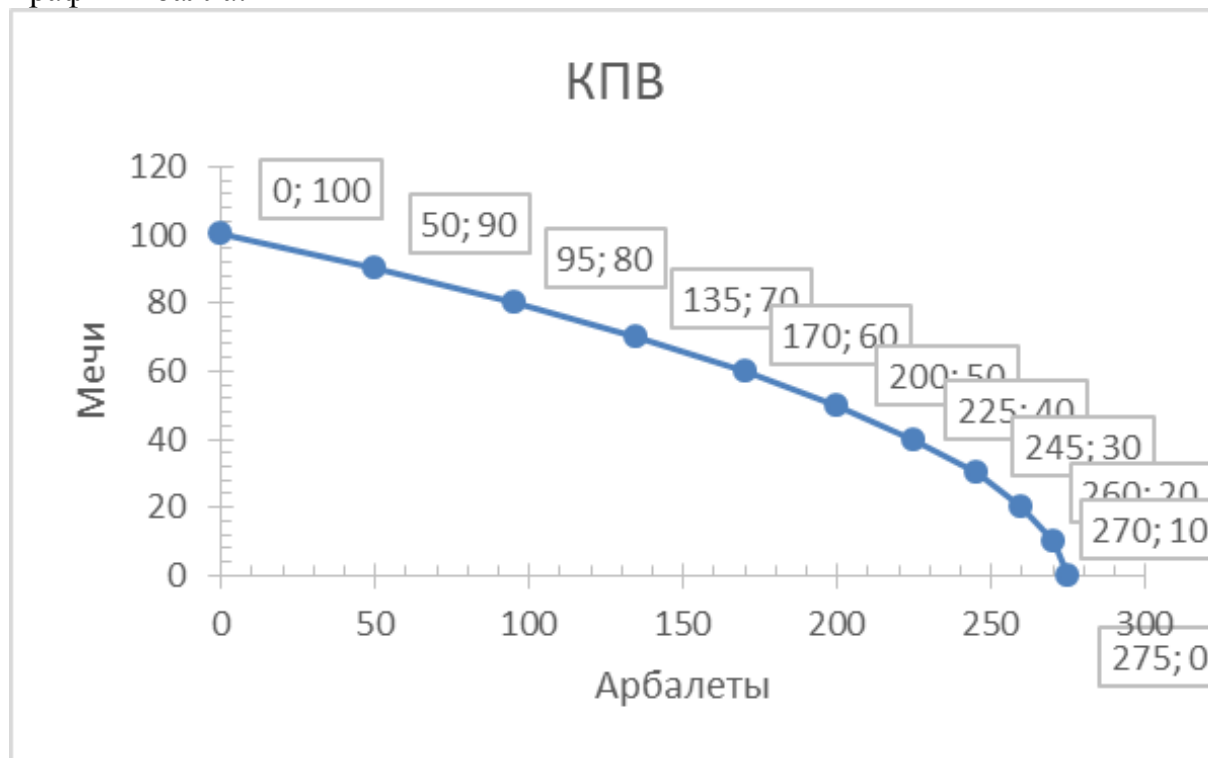
А) Для построения КПВ составим таблицу альтернативных вариантов производства в разных комбинациях (7 баллов):

Возможные альтернативы:

Мечи	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
Арбалеты	0	50	95	135	170	200	225	245	260	270	275
Прирост арбалетов		+50	+45	+40	+35	+30	+25	+20	+15	+10	+5

Значит, максимально возможное количество арбалетов при отсутствии выпуска мечей, равно 275 шт (2 балла).

График 2 балла:



Б) Эффективные комбинации (2 балла) + объяснения (2 балла):

А. 40 мечей и 135 арбалетов – неэффективна, так как точка А лежит внутри КПВ, следовательно, ресурсы используются неэффективно. В данном случае можно увеличить объем производства одного вида оружия, не уменьшая объем производства другого.

В. 40 мечей и 225 арбалетов – эффективна, т.к. точка лежит на КПВ, т.е. распределение ресурсов оптимально. Нельзя увеличить объем производства одного вида оружия, не уменьшая объем производства другого вида оружия.

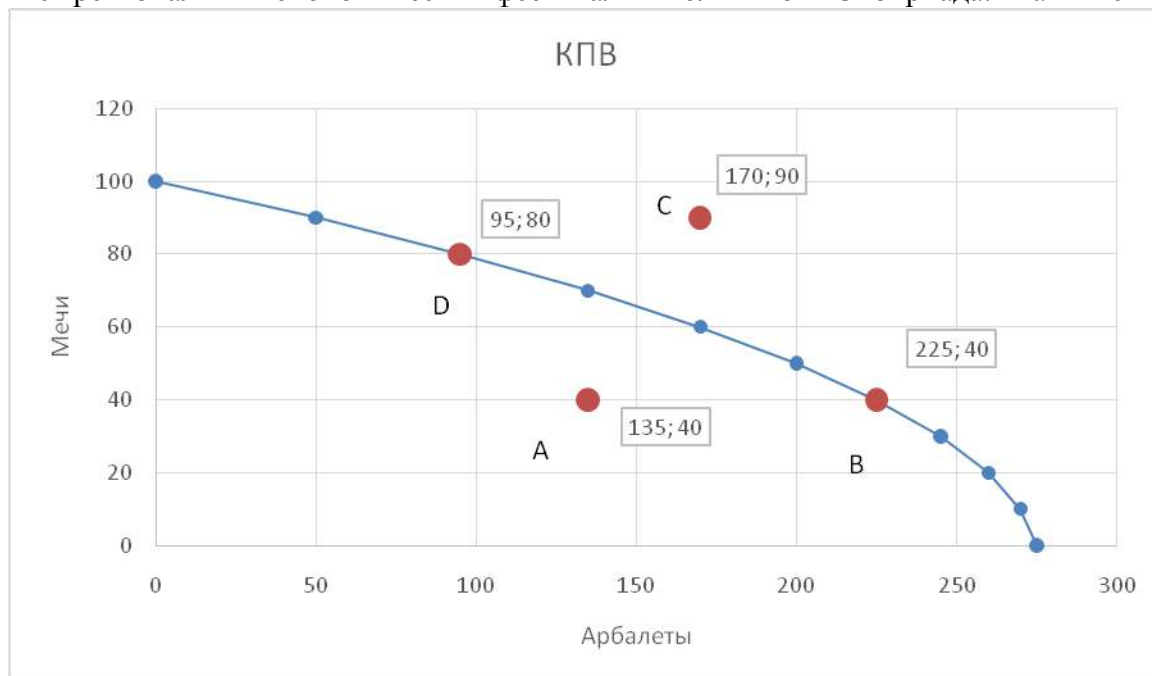
С. 170 арбалетов и 90 мечей – точка С лежит выше КПВ, т.е. такая комбинация недостижима при имеющемся количестве ресурсов и данной технологии.

Д. 95 арбалетов и 80 мечей – эффективная комбинация, точка лежит на КПВ. Нельзя увеличить объем производства одного вида оружия, не уменьшая объем производства другого вида оружия.

Комбинации, которые выберет город (2 балла): Людей в войске 500 человек. Следовательно, максимальная потребность города в оружии с учетом имеющегося равна $500 - 300 = 200$ арбалетов и $500 - 250 = 250$ мечей.

В. 40 мечей и 225 арбалетов – город не выберет такой вариант производства, т.к. потребность города в арбалетах составляет всего 200 единиц. Следовательно, будет перепроизводство арбалетов, и недопроизводство мечей.

Д. 95 арбалетов и 80 мечей – этот вариант город выберет, т.к. комбинация эффективная (точка лежит на КПВ), и при этом перепроизводства мечей или арбалетов нет.



В) (2 балла) Комбинации в точках А и С неэффективны, т.к. точки не лежат на КПВ. Соответственно необходимо изменить объемы производства того или иного вида оружия так, чтобы комбинация переместилась на КПВ. В комбинации А можно увеличить объем производства одного вида оружия, не уменьшая объем производства другого вида. Для этой комбинации есть следующие варианты:

1. Зафиксировать объем выпуска мечей на уровне 40 шт., увеличить объем выпуска арбалетов до 225 шт.
2. Зафиксировать объем выпуска арбалетов на уровне 135 шт., увеличить объем выпуска мечей до 70 шт.
3. Выбрать любую комбинацию на отрезке КПВ между точками (135, 70) и (225, 40), т.е. сдвинуть точку-комбинацию вправо-вверх.

В комбинации С необходимо снизить объем производства одного из видов оружия на выбор, либо снизить и объем производства мечей, и объем производства арбалетов. Иными словами, необходимо изменить комбинацию так, чтобы точка сместилась на границу КПВ.

Ответ: А) Максимально возможное количество арбалетов – 275 шт. Б) эффективны комбинации В, D. Город выберет комбинацию D. В) необходимо изменить объемы производства мечей и арбалетов так, чтобы комбинация лежала на КПВ.

Задача 2. «В далекой-далекой галактике» (20 баллов)

Однажды Хан Соло под действием убедительных доводов Оби-Вана Кеноби согласился доставить ценный груз с планеты Татуин на планету Раттатак. Кроме убедительных доводов Оби-Ван также пообещал Хану Соло за каждый парсек (пк) пути заплатить 100 кредитов, если груз будет доставлен не позже, чем через 35 часов от момента вылета, или 80 кредитов, если Соло будет лететь дольше. Посмотрев на карту, Соло увидел, что до Раттатака можно добраться тремя путями (см. рисунок): через Арканис, через Джеонозис и Геннарию, либо через Геннарию.



От Татуина до Арканиса и от Татуина до Джеонозиса расстояние одинаковое и равно 1 пк. Угол между маршрутом на Арканис и на Джеонозис с Татуина равен 60° . Расстояние от Арканиса до Джеонозиса равно расстоянию от Раттатака до Геннарии. Расстояние от Татуина до Раттатака в 3 раза больше, чем длина пути по маршруту Арканис-Татуин-Джеонозис и на 1 пк больше, чем расстояние от Джеонозиса до Геннарии. На каждой планете, мимо которой будет пролетать Хан Соло,

XXV Межрегиональный экономический фестиваль школьников «Сибиряда. Шаг в мечту» 21.01.18 необходимо сделать посадку для дозаправки и технического обслуживания корабля.

Скорость космического корабля равна 0,25 пк/час. Чтобы купить топливо, которого хватит, чтобы пролететь 1 пк, необходимо 50 кредитов. (За перелет обратно заплатит сам Оби-Ван). При каждой посадке тратится 0,5 часа времени, а также топлива еще на 20 кредитов, при каждом взлете тратится также полчаса времени и топлива на 30 кредитов. На каждой планете, где Соло совершит посадку для дозаправки и технического обслуживания, он проведет 4 часа. Корабль готов к вылету, но его необходимо заправить. Отсчет времени в пути Оби Ван начнет с момента взлета с Татуина.

А) Какой из трех путей стоит ему выбрать, если его цель – максимизация прибыли от этой поездки? (10 баллов)

Б) Предположим, что Хан Соло может каждый месяц получать столько прибыли, сколько принесет выбранный в предыдущем пункте оптимальный маршрут. Известно также, что Галактический банк предлагает депозиты без капитализации под 10% годовых. Какая начальная сумма необходима Соло, если он решил больше не оказывать услуги транспортировки грузов, и при этом каждый год получать такую же прибыль? (5 баллов)

В) Оказалось, что для того, чтобы полететь по выбранному в пункте А) оптимальному маршруту, Хану Соло придется приобрести для корабля дополнительный навигационный прибор. Какую максимальную цену Соло будет готов за него заплатить, учитывая, что он по-прежнему своей главной целью считает максимизацию прибыли, если каждый навигационный набор выходит из строя через месяц? (5 баллов)

Решение:

1. Обозначим планеты по заглавным буквам их названия. Определим расстояния между планетами. По условию расстояние А – Т = Т – Дж = 1 пк, т.е. нижний треугольник является равнобедренным. Поскольку угол между этими направлениями равен 60° , оставшиеся два угла в треугольнике равны между собой и равны 60° , значит треугольник равносторонний, и расстояние А – Дж = Р – Г тоже равно 1 пк. Расстояние Т – Р в 3 раза больше суммы расстояний А – Т и Т – Дж = $3 \cdot (1+1) = 6$ пк. Тогда расстояние А – Р = Г – Д = $6 - 1 = 5$ пк.

Расстояния Р-Г и А-Д и расстояния А-Р и Г-Д равны между собой, следовательно четырехугольник АРГД – параллелограмм. От планеты Г проведем высоту параллелограмма (или трапеции). Острый угол параллелограмма равен 60° , следовательно высота параллелограмма равна расстоянию $(Р - Г) \cdot \sin 60 = 1 \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$. Тогда второй

катет в маленьком треугольнике Р – Г – х равен по теореме Пифагора $\sqrt{1^2 - 0,866^2} = 0,5$.

Или через косинус: $x = 1 \cdot \cos 60 = 0,5$. Расстояние от Татуина до х = $6 - 0,5 = 5,5$. Тогда по теореме Пифагора расстояние Т – Г = $\sqrt{5,5^2 + 0,866^2} = 5,57$ пк. (Определение всех расстояний – 5 баллов).



2. Построим сводную таблицу затрат и доходов для каждого маршрута. При скорости 0,25 пк/ч корабль пролетает 1 парсек за 4 часа. (5 баллов).

	Т – А – Р	Т – Дж – Г – Р	Т – Г – Р
Расстояние, пк	$1+5=6$	$1+5+1=7$	$5,57+1=6,57$
Количество взлетов / посадок, шт	2/2	3/3	2/2
Время в полете, ч	$6*4=24$	$7*4=28$	$=6,57*4=26,28$
Время, проведенное в городе, ч	4	8	4
Время на взлет и посадку, ч	$=(2+2)*0,5=2$	$=(3+3)*0,5=3$	$=(2+2)*0,5=2$
Всего времени в пути, ч	$=24+4+2=30$	$=28+8+3=39$	$=26,28+4+2=32,38$
Расходы на топливо, кредов	$6\text{пк}*50+2\text{пос.}*20+2\text{вз.}*30=400$	$7\text{пк}*50+3\text{пос.}*20+3\text{вз.}*30=500$	$6,57\text{пк}*50+2\text{пос.}*20+2\text{вз.}*30=428,5$
Выручка (100 кр или 80 кр, в зависимости от времени)	$=6*100=600$	$=7*80=560$	$=6,57*100=657$
Прибыль = TR - TC	200	60	228,5

Б) Годовая прибыль Соло составляет $228,5*12=2742$ кредов. Каждый год он хочет получать такую сумму как процент от вклада, значит $2742=x*0.1$ (x – вклад), следовательно $x=27420$ кредов. **(5 баллов)**

В) Выбранный маршрут дает 228,5 кредов прибыли в месяц. Следующий по прибыли маршрут дает 200 кредов. Следовательно, максимальная цена навигационного прибора для корабля не может превышать $228,5-200=28,5$ кредов. Иначе Соло выгоднее выбрать другой маршрут, не требующий дополнительного оборудования. **(5 баллов)**

Ответ: А) Самый выгодный путь Татуин – Геннария – Раттатак, поскольку он дает максимально возможную при данных условиях прибыль. Б) В банк необходимо положить 27420 кредов, чтобы каждый год получать такую же прибыль, как при транспортировке грузов В) Максимальная цена навигационного прибора равна 28,5 кредов, иначе выгоднее выбрать другой маршрут.

Задача 3 «Как заработать на продаже соломы» (20 баллов)

Владелец постоянного двора в город Сен-Жермен, заметил, что в случае, если гостям города не хватает места для ночлега, они используют импровизированную постель из связки соломы. Он решил самостоятельно изготавливать и продавать эти связки.

Известно, что в свежескошенном виде еще не высушенная связка состоит на 20% из пшеницы, на 65% из ржи, а оставшаяся часть из тритикале (гибрид пшеницы и ржи). Весит свежескошенная связка 5 кг.

А) Какое количество травы каждого вида должен накопить владелец постоянного двора, для изготовления 50 связок соломы. **(8 баллов)**

Б) Какое количество воды в % содержит сухая связка соломы, если в свежескошенной пшенице содержание воды равно 70% от ее общего веса, рожь содержит 30% воды, а тритикале 75%, если вес связки сухой соломы составляет 3 кг. **(12 баллов)**

Решение:

А) Общий вес свежескошенной связки равен 5 кг, следовательно, в ней $0,2*5=1$ кг пшеницы, $0,65*5=3,25$ кг ржи и $(1-0,65-0,2)*5=0,15*5=0,75$ кг тритикале. **(4 балла)** Для изготовления 50 связок соломы ему необходимо накопить $1\text{кг}*50=50$ кг пшеницы, $3,25\text{кг} * 50=162,5$ кг ржи и $0,75\text{кг}*50=37,5$ кг тритикале. **(4 балла)**

Б) Вес полностью сухой части тогда составит $0,3*1=0,3$ кг пшеницы, $0,7*3,25=2,275$ кг ржи и $0,25*0,75=0,1875$ кг тритикале. **(6 баллов)** Всего вес сухой части равен $= 0,3+2,275+0,1875=2,7625$ кг. Тогда масса воды в связке соломы равна $3-2,7625=0,2375$ кг, что составляет $0,2375/3 \approx 7,9\%$ воды. **(6 баллов)**

Ответ: Для изготовления 50 связок соломы владельцу постоянного двора необходимо косить 50 кг пшеницы, 162,5 кг ржи и 37,5 кг тритикале. В одной связке соломы содержится 7,9% воды.

Задача 4. «Несправедливость на пиратском судне» (20 баллов)

Команда корабля «Приз Удачи» состоит из 40 человек: пиратов под предводительством капитана Черная Борода. На о. Черепа пираты нашли клад на и поделили его между собой. Согласно Пиратскому Кодексу самая большая доля клада, достается старшему командному составу: капитану, помощнику капитана, картографу и казначею. Их доля равна половине всего клада. Средний и младший командный составы делят оставшееся золото между собой в пропорции 4 к 1. Известно, что младшего командного состава в 3 раза больше, чем среднего.

- 1) Найдите долю доходов каждой группы пиратов после дележа клада. (12 баллов)
- 2) Постройте кривую Лоренца и рассчитайте коэффициент Джинни для пиратского судна. (8 баллов)

Решение:

1. Составим таблицу группы пиратов («населения») и доходов: (6 баллов по 1 баллу за каждый правильный ответ).

Группы командных составов по возрастанию доходов	Количество членов группы	Доля группы в %	Доля доходов группы
1-ая младший командный состав	$3X = 27$	$(27/40) \times 100\% = 67,5\%$	$(50\%/5) \times 1 = 10\%$
2-я средний командный состав	$X = 9$	$(9/40) \times 100\% = 22,5\%$	$(50\%/5) \times 4 = 40\%$
3-я старший командный состав	4 (капитан, помощник, картограф, казначей)	$(4/40) \times 100\% = 10\%$	$100\%/2 = 50\%$

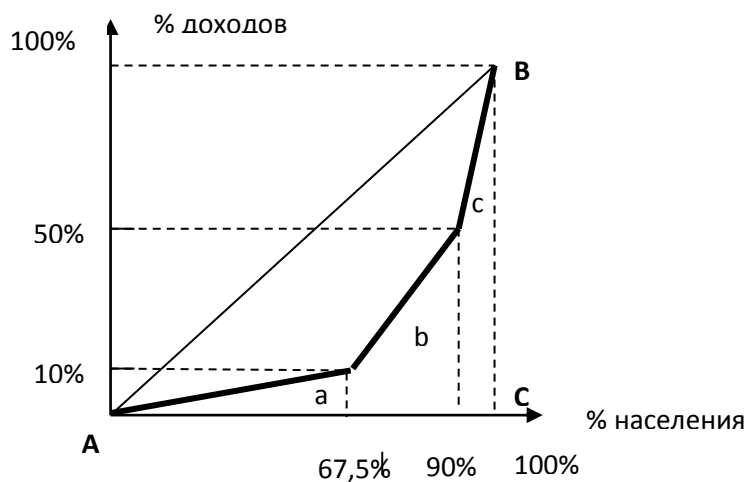
$40 - 4 = 36$ младший и средний состав всего. $X + 3X = 36$; $X = 9$

2. Кумулятивная таблица: (6 баллов по 1 баллу за каждый правильный ответ)

Группы командных составов по возрастанию доходов	% населения	% доходов группы
1-ая (младший состав)	67,5	10
1-ая+2-я (младший+средний)	90	50
1-ая+2-я+3-я (все)	100	100

В целом 12 баллов по 1 пункту, если правильно построена кривая Лоренца без расчёта кумулятивной таблицы

Соответствующая кривая Лоренца выглядит следующим образом: (2 балла)



Рассчитаем коэффициент Джинни: **(6 баллов)** $K_{дж} = [S_{\Delta ABC} - (S_{\Delta a} + S_{\text{трапеции } b} + S_{\text{трапеции } c})] / S_{\Delta ABC}$

Расчет площадей:

$$S_{\Delta a} = (67,5 \cdot 10) / 2 = 337,5 \text{ (1 балл)}$$

$$S_{\text{трапеции } b} = (10 \cdot (90 - 67,5) + ((90 - 67,5) \cdot (50 - 10)) / 2) = 225 + 450 = 675 \text{ (1 балл)}$$

$$S_{\text{трапеции } c} = (((100 - 90) \cdot 50) + ((100 - 90) \cdot 50)) / 2 = 500 + 250 = 750 \text{ (1 балл)}$$

$$\text{Сумма } (S_{\Delta a} + S_{\text{трапеции } b} + S_{\text{трапеции } c}) = 337,5 + 675 + 750 = 1762,5 \text{ (1 балл)}$$

$$S_{\Delta ABC} - (S_{\Delta a} + S_{\text{трапеции } b} + S_{\text{трапеции } c}) = (100 \cdot 100) / 2 - 1762,5 = 3237,5 \text{ (1 балл)}$$

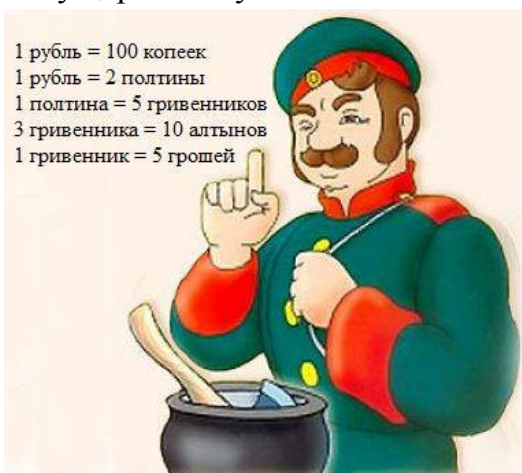
$$K_{дж} = 3237,5 / 5000 = 0,6475 \text{ т.е. } 64,75\% \text{ (1 балл)}$$

Ответ:

- Доля доходов каждой группы пиратов после дележа клада составила: младший командный состав **10%**, средний командный состав **40%**, старший командный состав **50%**
- Коэффициент Джинни для пиратского судна составил **0,6475**

Задача 5. «Каша из топора» (20 баллов)

Старый Солдат, вернувшись с царской службы, решил открыть кафе «Каша из топора». Обустроить кафе он решил в старенькой избе, доставшейся ему в наследство. За долгие годы у царя на службе он скопил 400 гривенников.



На покупку новой русской печи для приготовления каши, срок службы которой 5 лет, он затратил половину имеющихся средств. Для работы он нанял повариху и работника с заработной платой 30 алтынов каждому ежемесячно. Да только повариха требует оплату за год вперед, а вот работник согласился на оплату из выручки.

Для приготовления каши ему необходимо закупить соль и крупу на 40 полтин, а так же дрова для печи за 12 рублей. Недостающую сумму Солдат решил взять в кредит в ЦарьБанке под 25% годовых, кроме этого он узнал, что процент по депозитам в этом же банке составляет 15%. По его расчетам за 1 год он сможет продать 4300 порций каши

по цене 1 грош за порцию.

Солдат вел все расчеты в копейках, а система соотношения единых русских денег представлена на рисунке.

- Рассчитайте, выручку и бухгалтерскую прибыль, которую принесет кафе «Каша из топора» своему владельцу за 1 год. **(10 баллов)**

XXV Межрегиональный экономический фестиваль школьников «Сибиряда. Шаг в мечту» 21.01.18

- 2) Прознав про решение Солдата открыть кафе, его сосед Мельник, владелец небольшого трактира, предложил ему работу с оплатой 1 рубль в месяц, кроме этого он предложил на год взять в аренду избу солдата за 12 полтин в год. Стоит ли Солдату отказаться от предложения Мельника и начать собственный бизнес? Рассчитайте экономическую прибыль кафе «Каша из топора».

Подсказка: Экономическая прибыль = бухгалтерская прибыль – неявные затраты (альтернативные затраты)

Решение: Сначала найдем соотношение всех денежных единиц в копейках 1 полтина=100/2 = 50 копеек, 1 гривенник=1/5 полтины =10 копеек, 5 грошей =1 гривенник, а значит 1 грош =2 копейки, 10 алтынов =30 копейкам, а 1 алтын =3 копейкам.

1. Рассчитаем выручку кафе: $4300 \cdot 2 = 8600$ копеек. (3 балла)
2. Запишем все явные (бухгалтерские затраты) и неявные затраты в таблицу: (За верное нахождение суммы явных затрат 5 баллов, неявных затрат 6 баллов, в том числе, если задача решена частично, то за каждый пункт явных затрат по 1 баллу, неявных затрат по 2 балла).

Явные затраты	Расчет в копейках	Неявные затраты	Расчет в копейках
Амортизация печи	$(400/2 \cdot 10)/5 \text{ лет} = 400$	Сумма неполученных % по депозиту	$4000 \cdot 0,15 = 600$
Заработная плата рабочих (поварихи и пологового)	$(3 \cdot 30) \cdot 12 \cdot 2 = 2160$	Недополученная заработная плата	$1 \cdot 12 = 1200$
Приобретение соли и крупы	$40 \cdot 50 = 2000$	Недополученная плата за аренду	$12 \cdot 50 = 600$
Дрова для печи	$100 \cdot 12 = 1200$		
Сумма % по кредиту. Солдату не хватит собственных средств, 2000 коп. он потратит на печь, а еще 2000 уйдут на приобретение соли и крупы. Кредит необходим для выплаты з/п поварихе и покупку дров для печи.	$(1080 + 1200) \cdot 0,25 = 570$		
Итого:	6330	Итого:	2400

Бухгалтерские затраты = 6330 копеек.

Бухгалтерская прибыль = $8600 - 6330 = 2270$ копеек. (2 балла)

Экономические затраты = $6330 + 2400 = 8730$ копеек. (2 балла)

Экономическая прибыль = $8600 - 8730 = -130$ копеек.

Вывод о нецелесообразности собственного бизнеса 2 балла (или 4 балла, если не рассчитаны экономические затраты).

Ответ: $TR = 8600$ копеек, Бухгалтерская прибыль = 2270 копеек. Экономическая прибыль -130 копеек. Солдату не следует начинать собственный бизнес, а принять предложение Мельника.