

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ.**  
**для учащихся 11х классов.**

Продолжительность работы – 150 минут.

Максимальное количество баллов за задачи – 120.

Каждая задача оценивается из 24 баллов.

**Задача 1 «Бизнес на воде с сиропом».**

В Цветочном городе Пончик продает воду с сиропом. Он закупает ее оптом у Сиропчика по 13 руб. за бутылку и продает коротышкам по розничной цене 20 руб. за бутылку. Для торговли Пончик арендовал небольшой магазинчик, который имеет складское помещение, но за его использование нужно платить отдельно – 2 рубля в день за каждую бутылку, имеющуюся на складе на начало дня. Спрос на воду с сиропом стабилен – ежедневно объем продаж составляет 100 бутылок. Пончик закупает воду с сиропом регулярно, через одно и то же количество дней одинаковыми партиями. Затраты на доставку одной партии воды на склад составляют 300 руб. Пончик все точно рассчитал, и его бизнес приносит максимальную прибыль. Определите размер партии воды, закупаемой Пончиком.

**Задача 2 «Дискриминация и неравенство»**

В некотором государстве 50% взрослых работоспособных мужчин женаты, а 60% взрослых работоспособных женщин замужем. Доход всех работающих женщин одинаков и доход каждой работающей женщины в 3 раза ниже дохода работающего мужчины (доход всех мужчин также одинаков). Все работоспособные мужчины работают, а среди женщин работают только незамужние.

Определите коэффициент Джини для распределения дохода *между домохозяйствами* этого государства, если домохозяйством является семья, одинокий мужчина или одинокая женщина (любые другие иждивенцы доходов не имеют и находятся на попечении работающих граждан).

### Задача 3. «Вкусняшки в лесном царстве»

На рынке вкусняшек в лесном царстве действуют две группы покупателей: звери и птицы. Спрос зверей описывается функцией  $P = 10 - 0,05 \cdot Q$ , а спрос птиц – функцией  $P = 60 - 0,1 \cdot Q$ , где  $P$  – цена тонны вкусняшек в тугриках, а  $Q$  – количество вкусняшек, которое хотят приобрести покупатели, в тоннах. О предложении вкусняшек известно только то, что оно описывается линейной функцией и при цене 4 тугрика за тонну ценовая эластичность предложения вкусняшек равна 1. Кроме того, известно, что в случае фиксирования цены на уровне 4 тугрика за тонну общие расходы покупателей на покупку вкусняшек составят 320 тугриков.

Большинство жителей лесного царства очень недовольны высокой рыночной ценой вкусняшек, и они делегировали Волка и Орла просить лесного царя Медведя посодействовать тому, чтобы сделать вкусняшки более доступными. Медведь не против, и даже приказал выделить из царской казны  $X$  тугриков для решения вопроса. Проблема только в том, как распорядиться этой суммой. Волк предлагает выплачивать производителям вкусняшек субсидию –  $t$  тугриков за каждую проданную тонну. А Орел советует все выделенные деньги использовать на модернизацию производства, тогда по его оценкам непременно произойдет рост предложения вкусняшек аж на 250% при каждом уровне цен! Приглашенные эксперты – 33 попугая – провели исследование и вынесли вердикт - оба варианта, при прочих равных условиях, обеспечат одинаковое снижение рыночной цены вкусняшек. Однако они единогласно высказались в поддержку только одного варианта, исходя из предположения, что в будущем произойдет рост спроса на вкусняшки. В обоснование своей позиции они привели два весомых аргумента.

Определите:

- а) какую сумму  $X$  предполагается выделить из царской бюджета для поддержки производителей вкусняшек;
- б) как и на сколько процентов изменится цена тонны вкусняшек, если из казны будет выделена оговоренная сумма;
- в) за какой вариант расходования средств казны высказались 33 попугая, и каковы могли быть их аргументы.

#### Задача 4 «О целочисленности решения».

В олимпиадных задачах часто предполагается, что определенные величины, которые по своей природе могут принимать только целые значения, могут выражаться не только целыми числами. Это делается для упрощения решения. В практических задачах, однако, игнорировать целочисленность зачастую нельзя, так как решение в целых числах может существенно отличаться от решения в действительных числах. Рассмотрим это на следующем примере.

Товар  $X$  может выпускаться на станках двух типов. Один станок типа  $A$  может произвести максимум 100 ед. товара в день, и его аренда стоит 100 денежных единиц в день. Один станок типа  $B$  может произвести максимум 80 ед. в товара в день, и его аренда стоит 90 денежных единиц в день. Выпуск фирмы – не обязательно целое число.

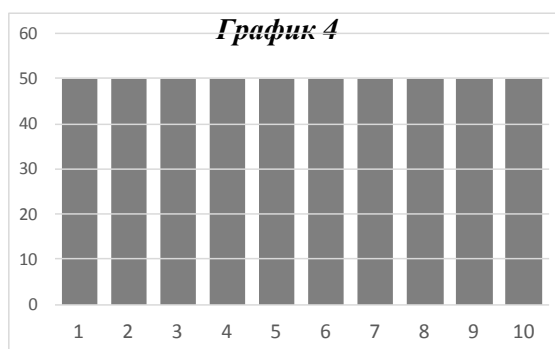
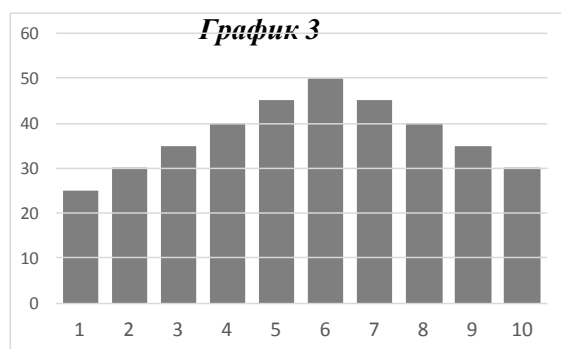
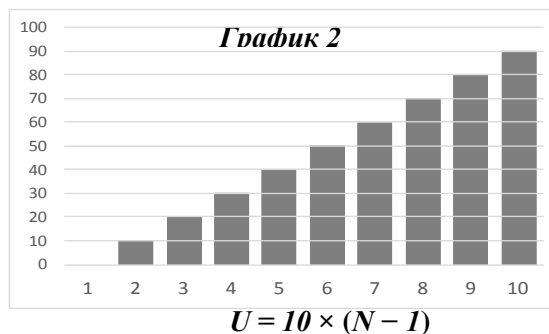
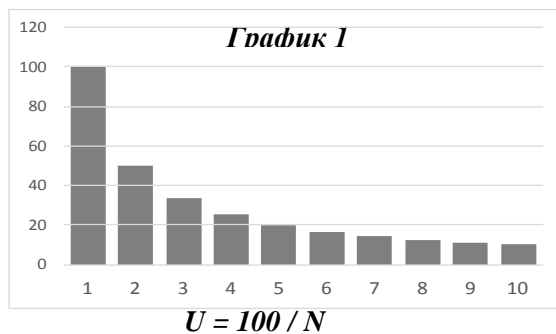
а) Допустим, количество станков не обязательно целое. Сколько станков каждого типа следует арендовать фирме, чтобы произвести  $Q$  ед. продукции в день и расходы на аренду были минимальны? Ответьте на вопрос для каждого  $Q > 0$ .

б) Теперь допустим, что количество станков может быть только целым. Сколько станков каждого типа следует арендовать фирме, чтобы произвести  $Q$  ед. продукции в день и расходы на аренду были минимальны при  $Q = 170$ ?  $Q = 240$ ?

в) Верно ли, что если в пункте а) оптимальным решением для фирмы является аренда  $a$  станков типа  $A$ , и  $a$  нецелое, то при учете целочисленности обоих типов станков оптимальным решением будет аренда  $a^*$  станков типа  $A$ , где  $a^*$  — одно из двух целых чисел, ближайших к  $a$ ?

### Задача 5 «Одному хорошо, а в компании лучше?»

Удовольствие (полезность), которое получает индивид, потребляющий благо, может зависеть не только от характеристик самого блага, но и от количества людей, потребляющих его одновременно с ним. Эту зависимость для разных благ можно изобразить графически. На приведенных ниже графиках по горизонтальной оси отложено количество пользователей (потребителей) блага ( $N$ ), а по вертикальной — удовольствие, которое получает от потребления каждый из них ( $U$ , в ютилях).



а) Приведите примеры благ, которые могли бы соответствовать графикам — по одному для каждого. Обоснуйте свой ответ.

б) Иногда при принятии решения о потреблении того или иного блага люди еще не знают точно, сколько других пользователей будут участвовать в потреблении. Например, отправляясь на горнолыжный курорт, человек может быть не в курсе, сколько других людей собираются туда в это же время, то есть насколько длинные будут очереди на подъемники.

Рассмотрим монополистов, предлагающих блага, соответствующие графикам 1—4. Каждый из монополистов предлагает свое благо, за использование или потребление которого он требует плату. У каждого блага есть по 10 потенциальных пользователей (потребителей). Каждый из них должен заплатить за участие в потреблении блага ту цену, которую назначит монополист. При этом любой пользователь принимает решение об оплате, когда он уже знает цену, назначенную монополистом, но не знает, сколько еще людей будут использовать это благо одновременно с ним.

Назовем *излишком потребителя* разницу между полезностью, которую он получает от блага, и уплаченной ценой. Человек, который не стал покупать благо, получает излишек 0. Назовем *равновесием* ситуацию, в которой каждый потенциальный потребитель повел себя так, чтобы его излишек был максимально возможным (с учетом выбора других участников). Если равновесий несколько, то будем считать, что реализуется то, в котором потребителей блага больше.

Найдите количество потребителей, которое будет у каждого блага в равновесии в зависимости от его цены (функцию спроса) Какая цена будет максимизировать выручку каждого монополиста?