ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ.
для учащихся 11х классов.

Продолжительность работы – 150 минут.
Максимальное количество баллов за задачи – 120.
Каждая задача оценивается из 24 баллов.

Задача 1 «Бизнес на воде с сиропом».

В Цветочном городе Пончик продает воду с сиропом. Он закупает ее оптом у Сиропчика по 13 руб. за бутылку и продает коротышкам по розничной цене 20 руб. за бутылку. Для торговли Пончик арендовал небольшой магазинчик, который имеет складское помещение, но за его использование нужно платить отдельно – 2 рубля в день за каждую бутылку, имеющуюся на складе на начало дня. Спрос на воду с сиропом стабилен – ежедневно объем продаж составляет 100 бутылок. Пончик закупает воду с сиропом регулярно, через одно и то же количество дней одинаковыми партиями. Затраты на доставку одной парии воды на склад составляют 300 руб. Пончик все точно рассчитал, и его бизнес приносит максимальную прибыль.
Определите размер партии воды, закупаемой Пончиком.

Решение: *Условие задачи допускает 2 подхода к решению. Любой из них оценивался полным баллом.*

Оптимальные размер партии зависит от того, в течение какого периода нужно максимизировать прибыль.

<u>Первый подход.</u>

Если стоит цель максимизировать среднюю дневную прибыль, то задача решается так.
Предположим, что партия воды закупается на t дней, тогда ее размер 100*t. Доход от продажи всей партии TR =20*100*t = 2000*t ***(4 балла)***
Издержки состоят из расходов на закупку (13*100*t = 1300*t), расходов на транспортировку (300) и расходов на хранение ***(1 балл за формулу расчета издержек на закупку и 1 балл за определение расходов на транспортировку).***

Определим расходы на хранение.
Если Пончик закупает 100*t бутылок воды, то в первый день расходы на хранение составят 2*100*t
К началу второго дня на складе будет 100*(t – 1) бутылок воды. Следовательно, расходы на хранение во второй день равны 2*100*(t – 1). Рассуждая аналогично, расходы в третий и день 2*100*(t – 2), четвертый день 2*100*(t – 3) и т.д., расходы в t-й день составят 2*100.
Последовательность расходов на хранение является арифметической прогрессией. Ее сумма:

$$S_t = \frac{a_1 + a_t}{2} * t = \frac{2 * 100 * t + 2 * 100}{2} * t = 100(t+1) * t \qquad (\mathbf{1})$$

(издержки хранения – 6 баллов)

Запишем функцию средней дневной прибыли:

$$\pi = \frac{2000 * t - 1300 * t - 300 - 100 * (t+1) * t}{t} = \frac{600t - 100t^2 - 300}{t} = 600 - 100t - \frac{300}{t} \to \max \qquad (\mathbf{2})$$

(запись функции прибыли 2 балла)

Равенство производной нулю достигается при $t = \sqrt{3} \approx 1.73$. Вторая производная отрицательна, так что это – точка максимума ***(расчет оптимального значения t – 3 балла, проверка достаточного условия максимума – 1 балл).***

Поскольку количество дней – целое число, то следует выбрать одно из двух значений t=1 или t=2 в зависимости от того, при каком из них прибыль больше.

$$\pi(1)=\frac{20*100-13*100-300-2*100}{1}=200$$

$$\pi(2)=\frac{20*200-13*200-300-100*(2+1)*2}{2}=250$$

(расчет и сравнение прибыли при двух значениях t – 6 баллов)

Очевидно, средняя дневная прибыль достигает максимума, если партия закупается на 2 дня. Значит, размер партии равен 100*2 = 200 бутылок.
Тот же результат может быть получен и методом перебора.
(такое решение оценивается также полным баллом при условии полного расчета всех вариантов и объяснения)
Сразу заметим, что из формулы (2) следует, что более, чем 5-дневные партии рассматривать нет смысла, так как издержки хранения возрастают так сильно, что прибыль, начиная с 6-дневной партии становится отрицательной.

Закупочный период	доход	издержки				прибыль	Средняя дневная прибыль
		закупка	транспортировка	Хранение*	ИТОГО		
1	2	3	4	5	6	7	8
1 день	100*20=2000	100*13=1300	300	200	1800	200	200
2 день	200*20=4000	200*13=2600	300	600	3500	500	**250**
3 день	300*20=6000	300*13=3900	300	1200	5400	600	200
4 дня	400*20=8000	400*13=5200	300	2000	7500	500	125
5 дней	500*20=10000	500*13=6500	300	3000	9800	200	40
6 дней	600*20=12000	600*13=7800	300	4200	12300	-300	-50

*Рассчитывается по формуле (1)
Ответ: 200 бутылок**.**

<u>*Второй подход*</u>
Если стоит цель максимизировать прибыль в течение какого-то более длительного срока работы предприятия, чем один день (T дней, где T – целое число), то оптимальный размер партии определяется длинной периода T.
Рассмотрим прибыль, которую получит Пончик за один закупочный период. Из таблицы (столбец 7) следует, что трехдневные парии можно не закупать, а заменить одну трехдневную партию тремя однодневными. Прибыль при этом будет одна и та же. Четырехдневную партию выгоднее заменить двумя двухдневными, тогда прибыль будет больше (500+500=1000 при двух двухдневных закупках против 500 при одной четырехдневной). Из тех же соображений пятидневную партию лучше заменить пятью однодневными. Таким образом, Пончику выгодно закупать либо однодневными, либо двухдневными партиями в зависимости от длины периода, в котором максимизируется прибыль ***(обоснование вывода о целесообразности только одно- и двухдневных партий – 4 балла).***

Если период содержит четное число дней, то очевидно, максимальная прибыль будет обеспечена двухдневными партиями, так как среднедневная прибыль при этом достигает максимума ***(2 балла).***
Поскольку максимальная дневная прибыль достигается при двухдневных закупках, встает вопрос о целесообразности рассмотрения периодов, содержащих нечетное число дней. Если окажется, что в периоды с четным числом дней $T=2N,\ N=1,2,3\ldots$ прибыль всегда выше, чем в периоды с нечетным числом дней $T=2N+1$, Пончику будет выгодно заменить период с нечетным числом дней на период на один день более короткий, содержащий четное число дней.
Прибыль, полученная за период, содержащий четное число дней определяется следующим образом:

$$\pi_{t=2}(T) = 250 * T,\ \ T = 2N,\ \ N = 1,2,3 \ldots$$

так как в этом случае закупки осуществляются двухдневными париями (200 бутылок), Пончик закупает воду каждые два дня и всю ее продает. Каждые два дня он получает прибыль 500 рублей, или в среднем в день 250 руб.

Прибыль, полученная за период, содержащий нечетное число дней, зависит от того, какими партиями производятся закупки воды.

Если закупки совершаются двухдневными партиями (200 бутылок), то для обеспечения продаж в течение T дней ($T = 2N - 1,\ \ N = 1,2,3 \ldots$) придется закупать воду на T+1 дней. В этом случае половина бутылок последней парии (100 бутылок) не будет продана, то есть прибыль за весь период будет меньше, чем при четном числе дней (T+1) на величину выручки одного дня (20*100=2000 руб.). Однако эти 100 бутылок и хранить нет смысла (лучше сразу от них избавиться так или иначе), чтобы не нести лишних расходов. А это уже увеличивает прибыль за период на величину затрат на хранение 100 бутылок в течение последнего закупочного периода, то есть на 2*2*100=400 руб. :

$$\pi_{t=2}(T) = 250 * (T + 1) - 2000 + 400 = 250 * T - 1350,\ \ T = 2N - 1,\ \ N = 1,2,3 \ldots$$

Однако, если сократить период на 1 день, то прибыль будет

$$\pi_{t=2}(T - 1) = 250 * (T - 1) = 250T - 250, \qquad T = 2N - 1,\ \ N = 1,2,3 \ldots$$

что выше, чем прибыль, полученная в периоде с нечетным числом дней.

Следовательно, если период содержит четное число дней, то закупки следует производить двухдневными партиями (200 бутылок), а периоды с нечетным числом дней выгодно заменять более короткими (на один день) периодами с четным числом дней, что позволит увеличить прибыль ***(8 баллов).***

Если закупки производятся однодневными партиями (100 бутылок), то прибыль равна

$$\pi_{t=1}(T) = 200 * T,\ \ \ T = 2N - 1, N = 1,2,3 \ldots$$

Если заменить период на более короткий (T-1), содержащий четное число дней, прибыль будет равна:

$$\pi_{t=2}(T - 1) = 250 * (T - 1) = 250T - 250, \qquad T = 2N - 1,\ \ N = 1,2,3 \ldots$$

Такая замена периода на более короткий имеет смысл, если она не приводит к уменьшению прибыли, то есть:

$$\pi_{t=2}(T - 1) = 250 * (T - 1) = 250T - 250 \geq 200 * T = \pi_{t=1}(T),\ \ \ T = 2N - 1,\ \ N = 1,2,3 \ldots$$

$$\rightarrow T \geq 5$$

Следовательно, при длительности периода, в котором максимизируется прибыль, превышающем 5 дней, максимум прибыли будет получен, если закупки производить двухдневными партиями (200 бутылок), а период с нечетным числом дней заменить на период на один день более короткий ***(6 баллов).***

Для длительности периода меньше 5 дней запишем прибыль, получаемую при закупках однодневными и двухдневными партиями:

	Партия 100 бутылок (однодневная) $\pi_{t=1}(T) = 200 * T$	Партия 200 бутылок (двухдневная) $\pi_{t=2}(T) = \begin{cases} 250 * T,\ \ T = 2N,\ \ N = 1,2,3 \ldots \\ 250 * T - 1350,\ \ T = 2N - 1,\ \ N = 1,2,3 \ldots \end{cases}$
1 день	200	- 1100
2 дня	400	500
3 дня	600	- 600
4 дня	800	1000
5 дней	1000	- 100

Очевидно, что при T<5 следует в период, содержащий нечетное число дней, закупать воду однодневными партиями, а в период, содержащий четное число дней – двухдневными. При T=5 и закупках однодневными партиями прибыль будет такая же, как и при T=4 и закупках двухдневными партиями. Так что в этом случае можно сократить период на один день без потери прибыли ***(4 балла).***

Ответ: размер партии зависит от длительности периода, в течение которого максимизируется прибыль. Если этот период не превышает 4 дней, то для получения максимальной прибыли размер партии должен быть равен 100 бутылок, если число дней в периоде нечетное, и 200 бутылок, если число дней четное. Если же длительность периода превышает 4 дня, то Пончику закупать нужно только партиями по 200 бутылок, при этом длительность периода, в котором максимизируется прибыль, должна быть равна четному числу дней, в противном случае прибыль не будет максимальной.

Задача 2 «Дискриминация и неравенство»

В некотором государстве 50% взрослых работоспособных мужчин женаты, а 60% взрослых работоспособных женщин замужем. Доход всех работающих женщин одинаков и доход каждой работающей женщины в 3 раза ниже дохода работающего мужчины (доход всех мужчин также одинаков). Все работоспособные мужчины работают, а среди женщин работают только незамужние.

Определите коэффициент Джини для распределения дохода *между домохозяйствами* этого государства, если домохозяйством является семья, одинокий мужчина или одинокая женщина (любые другие иждивенцы доходов не имеют и находятся на попечении работающих граждан).

Решение:

Пусть F – число семей. Тогда:

$\frac{F}{0,5} = 2F$ – число мужчин

$\frac{F}{0.6} = \frac{5}{3}F$ – число женщин

$\frac{5}{3}F - F = \frac{2}{3}F$ – число незамужних женщин

Число домашних хозяйств:

F – домохозяйства-семьи,

F– домохозяйства, состоящие из неженатых мужчин,

$\frac{2}{3}F$ – домохозяйства, состоящие из незамужних женщин,

Домохозяйства-семьи и домохозяйства, состоящие из неженатых мужчин, имеют одинаковый доход и одинаковую численность, поэтому объединим их в одну группу. Ее численность 2F, а доля в общей численности

$$\frac{2F}{2F + \frac{2}{3}F} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Доля домохозяйств, состоящих из незамужних женщин равна 0,25.

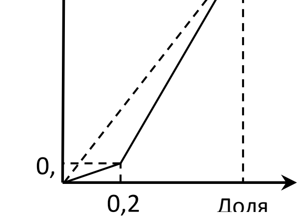
Если доход мужчины Z, то доход общества

$$Z * 2F + \frac{1}{3} * Z * \frac{2}{3} * F = \frac{20}{9} * ZF$$

Тогда доля доходов домохозяйств-семей и домохозяйств-неженатых мужчин в общем доходе:

$$\frac{2ZF}{\frac{20}{9} * ZF} = 0.9$$

Кривая Лоренца:



Коэффициент Джини G=0.25-0.1=0.15

Ответ: *0,15*

Критерии оценивания:

За определение групп домохозяйств (их две!) – *4 балла*.

За определение долей групп домохозяйств в общем числе домохозяйств – *9 баллов*.

За определение доли доходов групп домохозяйств в общем доходе всех домохозяйств – *7 баллов*.

За расчет коэффициента Джини – *4 балла*.

Задача 3. «Вкусняшки в лесном царстве»

На рынке вкусняшек в лесном царстве действуют две группы покупателей: звери и птицы. Спрос зверей описывается функцией Р = 10 – 0,05•Q, а спрос птиц – функцией Р = 60 – 0,1•Q, где Р – цена тонны вкусняшек в тугриках, а Q – количество вкусняшек, которое хотят приобрести покупатели, в тоннах. О предложении вкусняшек известно только то, что оно описывается линейной функцией и при цене 4 тугрика за тонну ценовая эластичность предложения вкусняшек равна 1. Кроме того, известно, что в случае фиксирования цены на уровне 4 тугрика за тонну общие расходы покупателей на покупку вкусняшек составят 320 тугриков.

Большинство жителей лесного царства очень недовольны высокой рыночной ценой вкусняшек, и они делегировали Волка и Орла просить лесного царя Медведя посодействовать тому, чтобы сделать вкусняшки более доступными. Медведь не против, и даже приказал выделить из царской казны Х тугриков для решения вопроса. Проблема только в том, как распорядиться этой суммой. Волк предлагает выплачивать производителям вкусняшек субсидию – t тугриков за каждую проданную тонну. А Орел советует все выделенные деньги использовать на модернизацию производства, тогда по его оценкам непременно произойдет рост предложения вкусняшек аж на 250% при каждом уровне цен! Приглашенные эксперты – 33 попугая – провели исследование и вынесли вердикт - оба варианта, при прочих равных условиях, обеспечат одинаковое снижение рыночной цены вкусняшек. Однако они единогласно высказались в поддержку только одного варианта, исходя из предположения, что в будущем произойдет рост спроса на вкусняшки. В обоснование своей позиции они привели два весомых аргумента.

Определите:

а) какую сумму Х предполагается выделить из царской бюджета для поддержки производителей вкусняшек;

б) как и на сколько процентов изменится цена тонны вкусняшек, если из казны будет выделена оговоренная сумма;

в) за какой вариант расходования средств казны высказались 33 попугая, и каковы могли быть их аргументы.

Решение:

1) Определим, какой была начальная цена вкусняшек.

Для этого сначала определим суммарную функцию спроса зверей и птиц на вкусняшки, преобразовав исходные функции спроса в функции вида Q=f(P). Функция спроса зверей будет иметь вид $\boldsymbol{Q} = 200 - 20\boldsymbol{P}$, а функция спроса птиц $\boldsymbol{Q} = 600 - 10\boldsymbol{P}$.

Суммарный спрос будет описываться кусочно-линейной функцией:

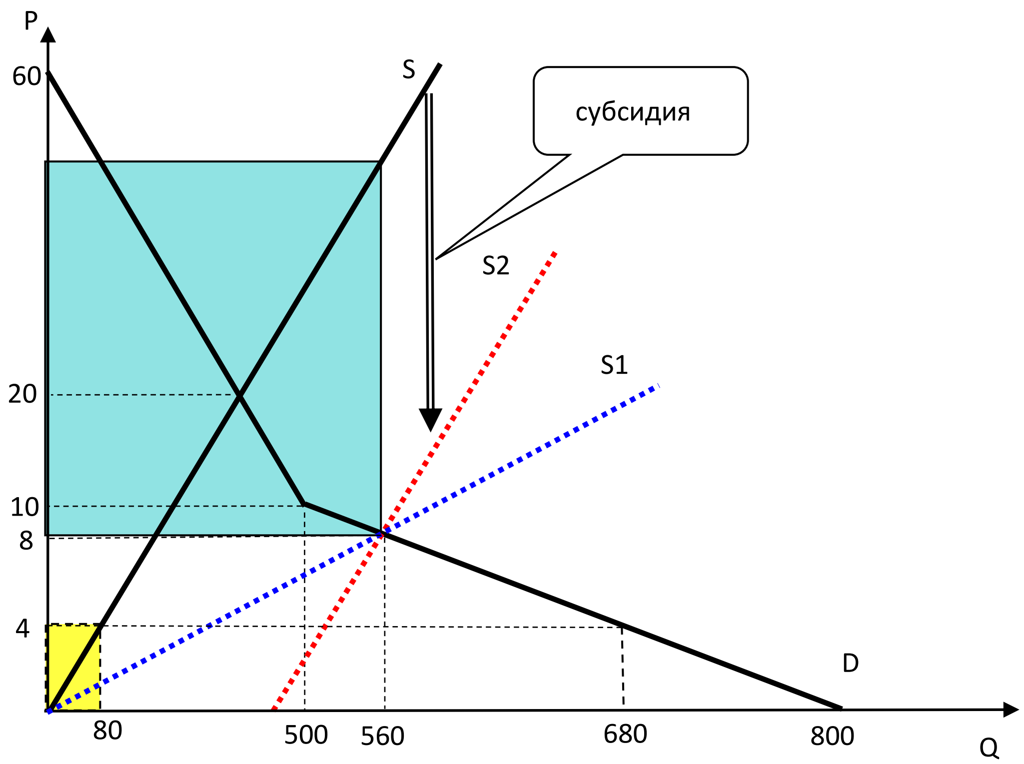
$$\begin{cases} 600 - 10\boldsymbol{P} \quad \textbf{\textit{при}} \quad 10 \le \boldsymbol{P} \le 60 \\ 800 - 30\boldsymbol{P} \quad \textbf{\textit{при}} \quad 0 \le \boldsymbol{P} \le 10 \end{cases}$$

Определим исходную функцию предложения вкусняшек. Так как она линейная и имеет эластичность равную 1, то она выходит из начала координат. Если бы цена была зафиксирована на уровне 4 тугрика за тонну, то покупатели смогли бы купить (320/4=80) тонн вкусняшек (в соответствии с условиями задачи), но они готовы купить 800-30*4=680 тонн (в соответствии с функцией спроса). При цене 4 тугрика на рынке был бы дефицит товара, а объем продаж определялся возможностями продавца предложить товар на продажу, т.е. функцией предложения. Отсюда следует, что график предложения проходит через точку с координатами (80; 4). Соответственно функция предложения имеет вид $\boldsymbol{Q} = 20\boldsymbol{P}$.

При цене 10 тугриков продавцы готовы продать 100 тонн вкусняшек, а покупатели готовы купить 500 тонн вкусняшек, на рынке возникнет дефицит товара, значит первоначальная равновесная цена должна быть больше 10 тугриков. Приравняв соответствующую функцию спроса и предложения, находим, что цена равна 20 тугриков.

2) Рассчитаем, какой станет новая цена вкусняшек.
Так как оба варианта реализации рекомендаций Волка и Орла приводят к одинаковому результату, то достаточно показать, как изменится функция предложение в результате реализации рекомендаций Орла – предложение должно вырасти в 3,5 раза при любых ценах. Получаем, что этот вариант изменения предложения даст новую функцию предложения $\boldsymbol{Q} = 70\boldsymbol{P}$. Чтобы получить новую равновесную цену мы снова должны приравнять функцию спроса и предложения, но теперь при цене 10 продавцы готовы продать 700 тонн вкусняшек, на рынке возникает излишек и равновесная цена будет меньше 10 тугриков. Приравняв соответствующую функцию спроса и предложения, находим, что цена будет равна 8 тугриков. Итак, цена снизится с 20 до 8 тугриков, т.е. снизится на 60%.
3) Определим ставку потоварной субсидии.
При цене 8 тугриков продавцы готовы продавать 560 тонн вкусняшек. Без субсидии и без модернизации производства данное количество товара они были готовы предложить по цене (560/20)=28 тугриков за тонну. 8 тугриков они получат от покупателей, а 20 тугриков им должна компенсировать царская казна. Таким образом, мы определили размер потоварной субсидии t=20 тугриков.
4) Оценим общую сумму субсидии.
Новому равновесию соответствует 560 тонн вкусняшек, за каждую проданную тонну из казны выделяют 20 тугриков, значит общая сумма субсидии (560*20)=11 200 тугриков.
5) Возможные аргументы экспертов:

- Субсидия только компенсирует издержки продавцов, ее придется выплачивать каждый год, в то время, как модернизация производства непосредственно снижает издержки и поэтому достаточно разовой выплаты из царской казны.
- Если будет расти спрос, то вариант с субсидией в будущем приведет к большему росту цены, нежели вариант с модернизацией.



Ответ: а) Для поддержки производителей вкусняшек предполагается выделить 11 200 тугриков.
б) Цена тонны вкусняшек снизится на 12 тугриков, или на 60% (с 20 до 8 тугриков за тонну).
в) Попугаи высказались за вариант модернизации производства.

Критерии оценивания:
Полная функция спроса с необходимыми ограничениями – *2 балла;*
верная исходная функция предложения – *1 балл;*
нахождение исходного равновесия – *1 балл;*

новая функция предложения – *1 балла;*
новое равновесие – *1 балл;*
процентное снижение цены вкусняшек – *2 балла;*
определение ставки субсидии – *4 балла;*
определение величины субсидии – *4 балла;*
4 балла за каждый аргумент, могут быть приведены и другие аргументы, не противоречащие экономической логике. В случае указания более 2-ух аргументов ставится максимальный балл за этот пункт (*8 баллов*).

Задача 4 «О целочисленности решения».

В олимпиадных задачах часто предполагается, что определенные величины, которые по своей природе могут принимать только целые значения, могут выражаться не только целыми числами. Это делается для упрощения решения. В практических задачах, однако, игнорировать целочисленность зачастую нельзя, так как решение в целых числах может существенно отличаться от решения в действительных числах. Рассмотрим это на следующем примере.

Товар X может выпускаться на станках двух типов. Один станок типа А может произвести максимум 100 ед. товара в день, и его аренда стоит 100 денежных единиц в день. Один станок типа В может произвести максимум 80 ед. в товара в день, и его аренда стоит 90 денежных единиц в день. Выпуск фирмы – не обязательно целое число.

а) Допустим, количество станков не обязательно целое. Сколько станков каждого типа следует арендовать фирме, чтобы произвести Q ед. продукции в день и расходы на аренду были минимальны? Ответьте на вопрос для каждого $Q > 0$.

б) Теперь допустим, что количество станков может быть только целым. Сколько станков каждого типа следует арендовать фирме, чтобы произвести Q ед. продукции в день и расходы на аренду были минимальны при $Q = 170$? $Q = 240$?

в) Верно ли, что если в пункте а) оптимальным решением для фирмы является аренда a станков типа А, и a нецелое, то при учете целочисленности обоих типов станков оптимальным решением будет аренда a^* станков типа А, где a^* — одно из двух целых чисел, ближайших к a?

Решение:

а) Обозначим количество станков типа А за a, а количество станков типа В за b. Тогда издержки фирмы равны $100a + 90b$, а выпуск равен $100a + 80b$.

Таким образом, фирма минимизирует значение выражения $100a + 90b$, выбирая любые неотрицательные a и b, удовлетворяющие условию $100a + 80b = Q$. Выражая $100a$ из условия и подставляя в формулу для издержек, получаем, что издержки равны $(Q - 80b) + 90b = Q + 10b$. Эта функция возрастает по b, поэтому фирме следует выбрать минимально возможное значение b, то есть 0.

Следовательно, при любом Q фирме оптимально арендовать 0 станков типа b и $Q/100$ станков типа А.

Можно было также заметить (второй способ решения), что при использовании станка типа А расходы на единицу продукции равны 1 ден. ед., а при использовании станка типа В — 9/8 ден. ед., и поэтому оптимальным является использование только станков типа А.

(6 баллов за решение любым способом)

б) 170 единиц можно произвести тремя способами: (1) Арендовать 2 станка типа А; (2) арендовать 1 станок типа А и 1 станок типа В; (3) арендовать 3 станка типа В. Издержки для этих трех способов равны 200, 190, и 270 соответственно; следовательно, оптимальным является способ (2) ***(6 баллов за рассмотрение случаев и выбор верного).***

240 единиц можно произвести четырьмя способами: (1) Арендовать 3 станка типа А; (2) арендовать 2 станка типа А и 1 типа В; (3) арендовать 1 станок типа А и 2 типа Б; (4) арендовать 3

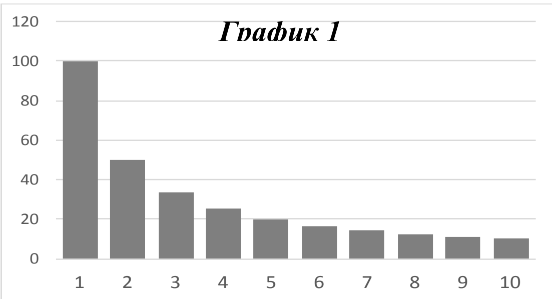
станка типа B. Издержки будут равны 300, 290, 280, и 270 единиц соответственно. Следовательно, оптимальным является способ (4). ***(6 баллов за рассмотрение случаев и выбор верного)***

в) Нет, неверно. Рассмотрим $Q = 240$. В пункте (а) оптимальной является аренда 2,4 станков типа A и 0 станков типа B. С учетом же целочисленности в (б) мы получили, что оптимальной является аренда 0 станков типа A и 3 станков типа B, но 0 не является одним из двух целых чисел, ближайших к 2,4 ***(6 баллов за контрпример).***

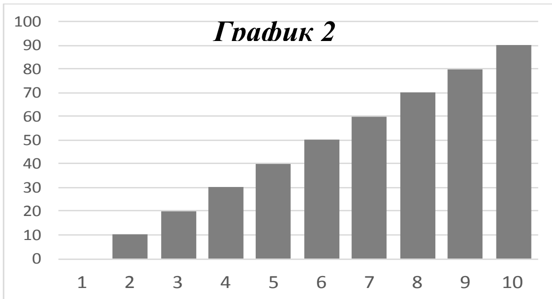
Примечание: для $Q = 240$ ответ в условиях целочисленности не только не является одним из ближайших к ответу без ограничения на целочисленность, но и является диаметрально противоположным: если без ограничения на целочисленность нужно арендовать только станки типа A, то с ограниченим — только станки типа B. Данная задача (с ограничением на целочисленность) является частным случаем *задачи о рюкзаке*, с различными вариациями которой можно встретиться в самых разных областях экономики.

Задача 5 «Одному хорошо, а в компании лучше?»

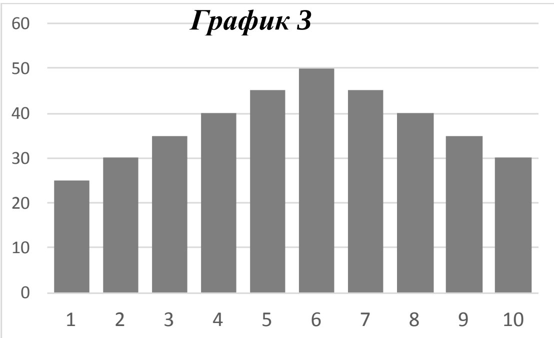
Удовольствие (полезность), которое получает индивид, потребляющий благо, может зависеть не только от характеристик самого блага, но и от количества людей, потребляющих его одновременно с ним. Эту зависимость для разных благ можно изобразить графически. На приведенных ниже графиках по горизонтальной оси отложено количество пользователей (потребителей) блага (N), а по вертикальной — удовольствие, которое получает от потребления каждый из них (U, в ютилях).



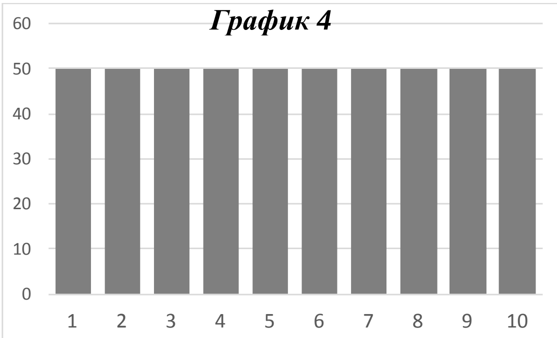
U* = 100 / *N



***U* = 10 × (*N* − 1)**



***U* = − 5 × |*N* − 6| + 50**



***U* = 50**

а) Приведите примеры благ, которые могли бы соответствовать графикам — по одному для каждого. Обоснуйте свой ответ.

б) Иногда при принятии решения о потреблении того или иного блага люди еще не знают точно, сколько других пользователей будут участвовать в потреблении. Например, отправляясь на горнолыжный курорт, человек может быть не в курсе, сколько других людей собираются туда в это же время, то есть насколько длинные будут очереди на подъемники.

Рассмотрим монополистов, предлагающих блага, соответствующие графикам 1—4. Каждый из монополистов предлагает свое благо, за использование или потребление которого он требует плату. У каждого блага есть по 10 потенциальных пользователей (потребителей). Каждый из них должен заплатить за участие в потреблении блага ту цену, которую назначит монополист. При этом любой пользователь принимает решение об оплате, когда он уже знает цену, назначенную монополистом, но не знает, сколько еще людей будут использовать это благо одновременно с ним.

Назовем *излишком потребителя* разницу между полезностью, которую он получает от блага, и уплаченной ценой. Человек, который не стал покупать благо, получает излишек 0. Назовем *равновесием* ситуацию, в которой каждый потенциальный потребитель повел себя так, чтобы его излишек был максимально возможным (с учетом выбора других участников). Если равновесий несколько, то будем считать, что реализуется то, в котором потребителей блага больше.

Найдите количество потребителей, которое будет у каждого блага в равновесии в зависимости от его цены (функцию спроса) Какая цена будет максимизировать выручку каждого монополиста?

Решение: а)

1. Ценность блага для потребителя обратно пропорциональна числу пользователей. Можно предположить, что речь идет о каком-то *частном* благе, которое делится поровну на всех его потребителей. Скажем, это может быть пицца, которая каждому потребителю приносит ценность 100, если съедена целиком, а отдельный кусок приносит полезность 100/N (если пицца разделена на N равных кусков).

Второй вариант интерпретации — *демонстративное потребление* (снобизм). Иногда потребители некоторых благ чувствуют себя хуже, если эти блага не эксклюзивны. Например, богатый человек, покупающий дорогую яхту, хотел бы быть единственным владельцем такой яхты в мире, и чем больше в мире еще таких яхт, тем менее его собственная яхта для него ценна ***(2 балла за любую из двух интерпретаций).***

2. Если потребитель является единственным пользователем блага, то оно не приносит ему полезности. Далее, чем больше потребителей, тем больше полезность для каждого. Такие блага называются *сетевыми*: пользователи объединяются в сеть и общаются в ней друг с другом. Например, таким благом является телефон: он тем более ценен, чем большему количеству людей (обладателей такого же телефона) можно позвонить ***(2 балла).***

3. При небольшом количестве пользователей это благо похоже на сетевое (ценность для каждого потребителя растет по мере увеличения их числа), а затем — на частное. Такие блага называются *клубными*: быть единственным пользователем неинтересно, но и слишком большому числу людей будет тесно. В качестве примера можно привест, например, футбольную площадку, встречу любителей игры в карты и т. п. ***(2 балла)***

4. В этом случае представлен классический пример *общественного* блага, которое в полной мере обладает свойством неконкурентности: ценность для каждого потребителя не зависит от того, сколько других потребителей есть у данного блага. В качестве примера подойдет любое общественное благо: солнечный свет, национальная оборона, доска объявлений и т. п. ***(2 балла)***

б) Пусть P — цена блага, назначенная монополистом.

1. Потребитель с номером N будет подключаться к потреблению блага, только если его излишек, равный ($100/N$ – P), не меньше 0 (если он равен 0, то потребитель подключится к потреблению из-за условия о реализации равновесия с максимальным числом участников). Значит, N потребителей подключатся, если цена не больше $100/N$, и тогда по определению обратная функция спроса имеет вид P = $100/N$ (при целых N), а прямая:

$$N = \begin{cases} 0, \text{если } P > 100, \\ 1, \text{если } P \in (50; 100], \\ 2, \text{если } P \in (100/3; 50], \\ 3, \text{если } P \in (25; 100/3], \\ 4, \text{если } P \in (20; 25], \\ 5, \text{если } P \in (100/6; 20], \\ 6, \text{если } P \in (100/7; 100/6], \\ 7, \text{если } P \in (12{,}5; 100/7], \\ 8, \text{если } P \in (100/9; 12{,}5], \\ 9, \text{если } P \in (10; 100/9], \\ 10, \text{если } P \leq 10. \end{cases}$$

(1 балл за функцию спроса)

Выручка монополиста будет равна 100 **при любой цене из множества (100; 50; 100/3; 25; 20; 100/6; 100/7; 12,5; 100/9; 10)** — при таких ценах подключатся 1, 2, … 10 потребителей соответственно ***(1 балл за правильный набор цен)***. При любой другой цене выручка будет меньше, так как подключившиеся потребители заплатят не максимальную цену. (Например, если цена 24, то подключатся 4 потребителя, как и при цене 25, но они заплатят меньше.)

2. При цене P, не большей 90, всегда есть два равновесия: никто не пользуется и пользуются все. Действительно, если никто не подключился, то никто не сможет увеличить свой излишек, подключившись первым (у первого полезность равна 0). Если же хоть кто-то подключился, то выгодно подключиться всем (у остальных излишек будет еще больше, чем у первого). По условию, из двух равновесий будет реализовываться наилучшее для монополиста, так что выручка будет равна $10P$. Если цена больше 90, то не подключается (даже если подключатся все, они получат отрицательный излишек).

   Получаем функцию спроса: ***(2 балла)***

$$N = \begin{cases} 0, \text{если } P > 90, \\ 10, \text{если } P \leq 90. \end{cases}$$

   Значит, монополисту нужно установить максимально возможную цену (**90**) ***(2 балла за правильный ответ).***

3. Возможны 7 случаев, которые представлены в таблице ***(4 балла за рассмотрение случаев и выбор оптимальной цены).***

Цена P	**Равновесия**		**Выручка при максимальной цене**	**Комментарий**
	Первое	**Второе**		
$P > 50$	$N = 0$	—	0	Даже максимально возможная полезность будет меньше цены
$P \in (45; 50]$	$N = 0$	$\boldsymbol{N = 6}$	TR = 50 × 6 = 300	Первое равновесие существует, потому что при $N = 0$ быть первым подключившимся невыгодно. Если при таких ценах подключатся 6 человек, то у всех будет неотрицательный излишек.
$P \in (40; 45]$	$N = 0$	$\boldsymbol{N = 7}$	TR = 45 × 7 = 315	Аналогично $P \in (45; 50]$
$P \in (35; 40]$	$N = 0$	$\boldsymbol{N = 8}$	**TR = 40 × 8 = 320**	Аналогично $P \in (45; 50]$
$P \in (30; 35]$	$N = 0$	$\boldsymbol{N = 9}$	TR = 35 × 9 = 315	Аналогично $P \in (45; 50]$
$P \in (25; 30]$	$N = 0$	$\boldsymbol{N = 10}$	TR = 30 × 10 = 300	Аналогично $P \in (45; 50]$
$P \leq 25$		$\boldsymbol{N = 10}$	TR = 25 × 10 = 250	Первого равновесия нет, так как при таких ценах даже единственным пользователем быть (нестрого) выгоднее, чем не подключаться у потреблению.

Получаем функцию спроса: ***(4 балла)***

$$N = \begin{cases} 0, \text{если } P > 50, \\ 6, \text{если } P \in (45; 50], \\ 7, \text{если } P \in (40; 45], \\ 8, \text{если } P \in (35; 40], \\ 9, \text{если } P \in (30; 35], \\ 10, \text{если } P \leq 30. \end{cases}$$

Как видно из таблицы, максимальную выручку фирма получает, назначив цену **40**.

4. Максимальная готовность платить каждого покупателя равна 50 независимо от их количества, следовательно, функция спроса имеет вид: ***(1 балл)***

$$N = \begin{cases} 0, \text{если } P > 50, \\ 10, \text{если } P \leq 50. \end{cases}$$

Чтобы максимизировать выручку, фирме нужно назначить максимальную цену, при которой подключатся все 10 пользователей — цену **50**. ***(1 балл)***

Председатель оргкомитета, начальник управления образовательной политики В.Н. Щукин

Министерство образования, науки и инновационной политики Новосибирской области
ДЛЯ ДОКУМЕНТОВ