

**Олимпиада по экономике для учащихся 9-10-х классов  
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.**

**25 февраля 2015 год.**

**Всего за задачи 100 баллов**

**Время выполнения 140 минут**

**Задача 1. Мастерская «Столы & стулья» (25 баллов)**

Маленькая мастерская «Столы & стулья» специализируется на выполнении заказов по изготовлению столов и стульев. В мастерской работают три брата. Каждый из братьев за месяц готов изготовить максимум 40 стульев, однако их желания и возможности по изготовлению столов сильно различаются.

- Старший брат — на все руки мастер, может делать и столы, и стулья, при этом альтернативная стоимость изготовления 1 стола для него всегда равна 2-м стульям.
- Средний брат тоже может изготавливать и столы, и стулья, однако он принципиально придерживается правила: столы и стулья он будет производить *только* комплектами — 1 стол и к нему 4 стула. Так и никак иначе!
- Младший брат не так давно начал работать в мастерской и все никак не научится делать столы, хотя стулья у него получаются не хуже, чем у братьев.

а) Покажите на графике в координатных осях  $X$  и  $Y$  множество производственных возможностей мастерской, указав на горизонтальной оси  $X$  количество изготавливаемых стульев, а на вертикальной оси  $Y$  количество изготавливаемых столов. Объясните логику ваших построений.

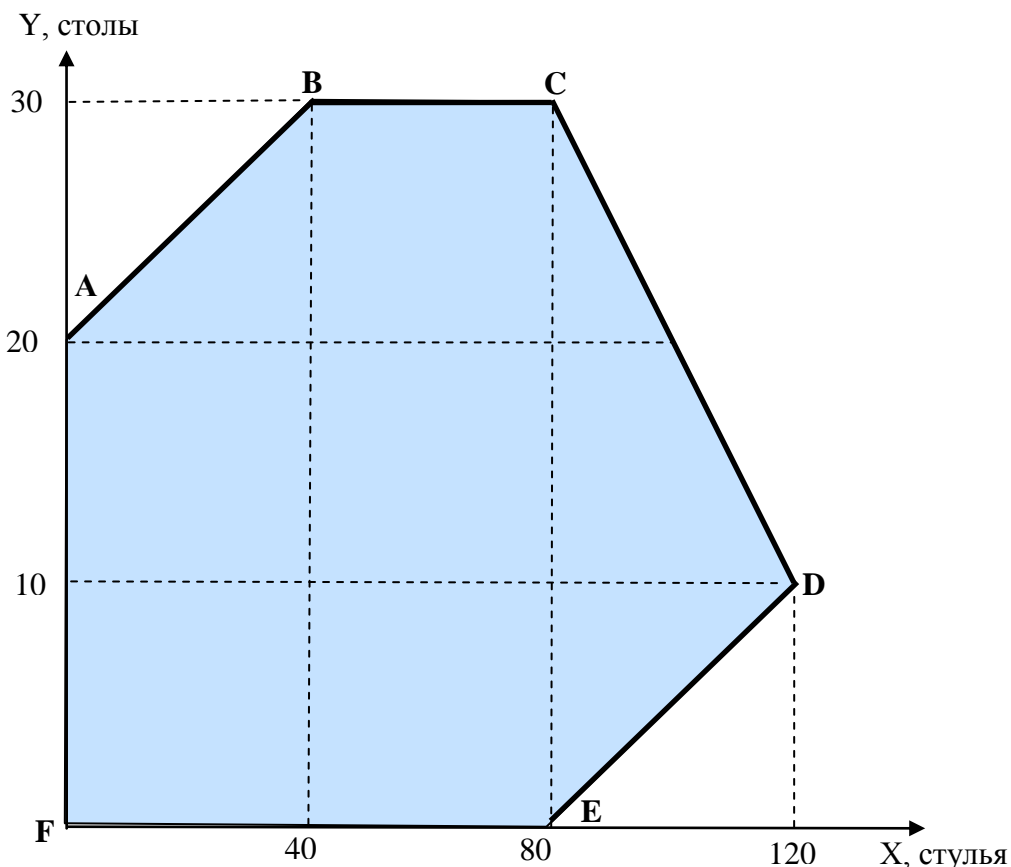
б) В мастерскую обратились 3 клиента: Иванов, Петров и Сидоров. Иванов хочет заказать 5 столов и 110 стульев и готов за заказ заплатить 50 тысяч рублей. Петрову нужно 20 столов и 82 стула, за заказ он готов заплатить 70 тысяч рублей. Сидоров очень хочет приобрести 8 столов и 4 стула и готов заплатить 30 тысяч рублей. Очевидно, что выполнить все заказы мастера не смогут, кому-то придется отказать. Исходя из возможностей мастерской, дайте обоснованные рекомендации по организации работы братьев-мастеров на следующий месяц, следуя которым мастерская сможет получить максимальный доход. Покажите решение на графике.

**Решение**

а) Множество производственных возможностей мастерской – это многоугольник ABCDEF.

Логика построения этого множества может быть такой:

**отрезок FA** – мастерская производит только столы, производством занимается только старший брат, максимально он может произвести только 20 столов (точка A);



**отрезок АВ** – мастерская начинает производить и стулья, производством которых следует заняться среднему брату, при этом растет и количество производимых столов, так как он производит мебель только комплектами – в точке В старший брат делает 20 столов, а средний брат 40 стульев и 10 столов;

**отрезок ВС** – к производству стульев подключается младший брат, максимально он может произвести 40 стульев, прироста столов уже быть не может – в точке С производится 30 столов и 80 стульев;

**отрезок CD** – мастерская еще может нарастить производство стульев, но только за счет уменьшения производства столов старшим братом, при этом максимально может быть произведено 120 стульев – точка D;

**отрезок DE** – если мастерская начнет сокращать производство столов, то прироста производства стульев не будет, так как столы делает только средний брат, а сокращая количество производимых столов, он одновременно сокращает и производство стульев;

**отрезок EF** – старший и младший брат делают только стулья.

б) Составим таблицу, которая покажет возможности мастерской, связанные с выполнением заказов

заказы	только заказ Иванова	только заказ Петрова	только заказ Сидорова	заказ Иванова и Петрова	заказ Петрова и Сидорова	заказ Иванова и Сидорова	заказ Иванова, Петрова и Сидорова
столы	5	20	8	25	28	13	33
стулья	110	82	4	192	86	114	196
ожидаемый доход мастерской	50	70	30	120	100	80	150
возможность выполнения	можно	можно	можно	нельзя	нельзя	можно	нельзя

Возможность одновременного выполнения двух заказов требует обоснования.

Одновременно выполнить заказ Иванова и Петрова нельзя (больше 120 стульев мастерская произвести не может).

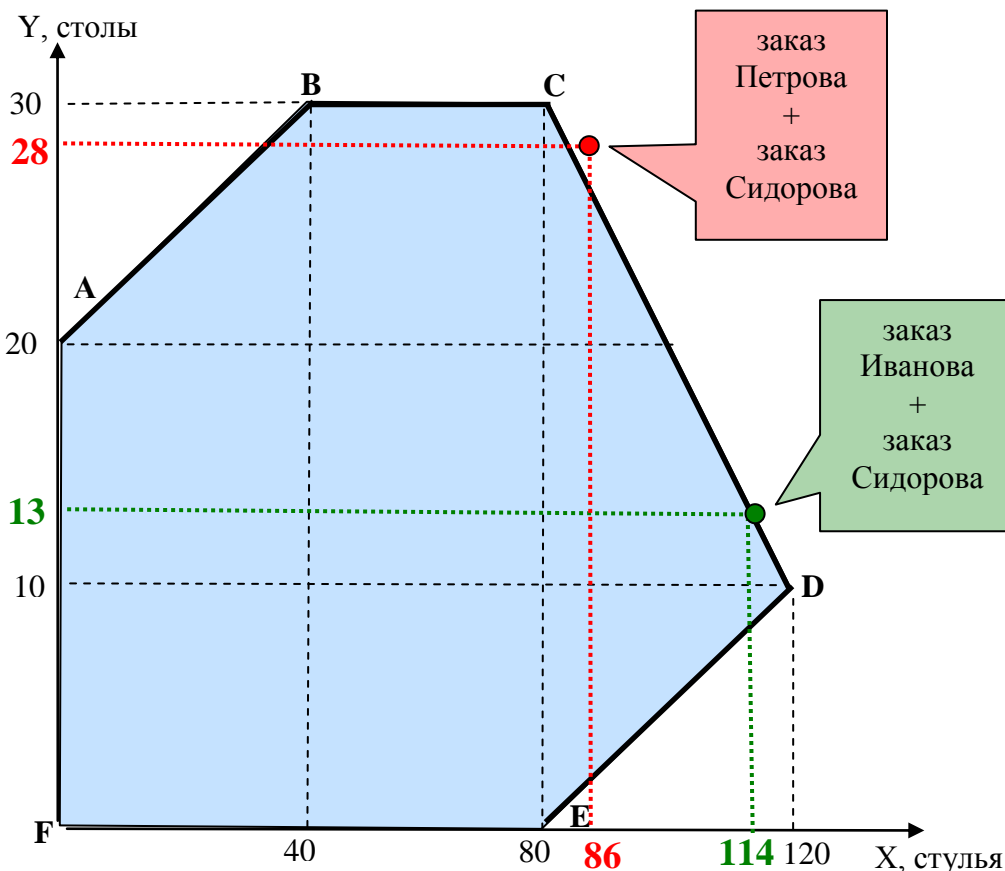
Одновременно выполнить заказ Петрова и Сидорова тоже нельзя. Предположим, что мастерская взялась бы за этот заказ, тогда 28 столов нужно изготовить силами старшего и среднего брата: средний брат сделает 10 столов, и 18 столов сделает старший брат. Стулья будет делать средний брат – 40 стульев в составе комплектов и младший брат – 40 стульев, старший же брат может сделать только  $(40-36)=4$  стула, так как для него альтернативная стоимость 18 столов равна  $18 \cdot 2=36$  стульев. Итак, при производстве 28 столов мастерская максимально может изготовить только  $(40+40+4)=84$  стула, а это меньше требуемых 86, т.е. полностью выполнить эти два заказа нельзя.

А вот одновременно выполнить заказ Иванова и Сидорова можно (при производстве 13 столов мастерская максимально может изготовить ровно 114 стульев). При этом, средний брат делает 10 столов и 40 стульев, младший брат делает только стулья (40 штук) Старший брат изготавливает еще 3 стола, а так как альтернативная стоимость 1 стола для него равна 2-м стульям, то изготовив 3 стола он «потерял» возможность изготовить  $(3 \cdot 2)=6$  стульев, а значит он может изготовить всего 34 стула  $(40-6=34)$ .

Специализация братьев при выполнении парного заказа (заказ Иванова+заказ Сидорова) показана в таблице.

	столы	стулья
Старший брат	3	34
Средний брат	10	40
Младший брат	нет	40
<b>ВСЕГО</b>	<b>13</b>	<b>114</b>

На графике показано, что парный заказ Петрова и Сидорова действительно выполнить нельзя (на его выполнение не хватает ресурсов), а заказ Иванова и Сидорова – можно, при этом ресурсы мастерской используются полностью.



*Примечание.* Оценку возможности выполнения парных заказов можно произвести, определив уравнение прямой линии, проходящей через точки C и D. Координаты этих точек известны: у точки C (80, 30), у точки D (120, 10). Легко вывести уравнение прямой, проходящей через эти две точки, используя следующее соотношение:  $\frac{Y - Y_D}{X - X_D} = \frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$ .

Подставив соответствующие значения координат точек C и D, получаем

$$\frac{Y - 10}{X - 120} = \frac{30 - 10}{80 - 120}$$

Это соотношение позволяет найти нужное нам уравнение прямой линии  $Y = 70 - 0,5X$

### **Критерии оценивания**

а) Показано на графике множество производственных возможностей мастерской – **8 баллов**.

Дано обоснование построения множества производственных возможностей мастерской – **7 баллов**.

б) Рассмотрены все возможности выполнения парных заказов – **6 баллов** (по 2 балла за каждый парный заказ).

Указано, чем занимается каждый из братьев при выполнении парного заказа (заказ Иванова+заказ Сидорова) и даны соответствующие пояснения – **3 балла**.

Показана на графике точка, соответствующая выбору мастеров принятого парного заказа (заказ Иванова+заказ Сидорова) – **1 балл**.

**Задача 2. Аннуитет Ерофея (25 баллов)**

31 декабря 2012 года Ерофей взял в «Бета-банке» некую сумму в кредит на срок 4 года по ставке 25% годовых. Договор предусматривает погашение кредита по популярной *аннуитетной* схеме: в конце каждого года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 25%), а затем Ерофей переводит в банк фиксированный платеж в размере  $X$  рублей. Банк рассчитал, что для того, чтобы долг был полностью выплачен за 4 года,  $X$  должен равняться 625 тыс. рублей.

а) Найдите сумму, которую Ерофей взял в кредит;

б) В конце 2014 года рыночная ставка по кредиту снизилась до 15 % годовых. Несмотря на то, что, согласно текущему договору кредитования, ставка по кредиту Ерофея неизменна и равна 25 %, Ерофей придумал, как можно сэкономить на выплате процентов. 31 декабря 2014 года он закрыл кредит в «Бета-банке» досрочно, а сумму, необходимую для этого (за исключением текущего платежа по старому кредиту) он взял в кредит в «Гамма-банке». Ставка по новому кредиту равна 15 %; выплаты по нему производятся двумя равными платежами — в конце 2015 и 2016 года.

На сколько процентов уменьшится ежегодный платеж Ерофея в 2015 и 2016 годах в результате его действий?

**Решение**

а) **(13 баллов за пункт)** Обозначим искомую сумму за  $B$ . В конце первого года долг составит  $1,25B - X = 1,25B - 625$ . В конце второго года долг составит  $1,25(1,25B - 625) - 625$ . Продолжая эту цепочку, получаем, что в конце четвертого года долг равен

$$1,25[1,25(1,25(1,25B - 625) - 625) - 625] - 625 = 0. \text{(10 баллов)}$$

Раскрывая скобки и решая это уравнение, получаем, что  $B = 1476$ . **(3 балла)**

б) **(12 баллов за пункт)** На конец 2014 года сумма долга равна  $1,25(1,25 \cdot 1476 - 625) - 625 = 900$  тыс. рублей. **(4 балла)** Именно эту сумму Ерофею надо взять в кредит в другом банке.

По аналогии с пунктом (а), платеж по новому кредиту будет удовлетворять уравнению  $1,15(1,15 \cdot 900 - X) - X = 0$ . **(4 балла)** Решая его, получаем, что  $X \approx 553,6$  тыс. руб. **(3 балла)** Значит, платеж уменьшится примерно на  $(1 - 553,6/625) \cdot 100\% \approx 11,4\%$ . **(1 балл)**

**Задача 3. Ассортимент при ограниченных финансовых возможностях (25 баллов)**

Фирма является единственным производителем товаров  $X$  и  $Y$ . Издержки производства товара  $X$  описываются функцией  $TC(X) = 10X + 5$ , где  $X$  — количество товара  $X$ . Издержки производства товара  $Y$  равны  $TC(Y) = 15Y + 10$ , где  $Y$  — количество товара  $Y$ . Известны обратные функции спроса на эти продукты:  $P_X = 20 - X$ ,  $P_Y = 75 - 2Y$ .

а) Какое количество каждого товара будет выпускать фирма, максимизирующая прибыль, если ее финансовые возможности ограничены суммой 300 ден. ед., и в пределах этой суммы затрат ее производственные возможности позволяют выпускать любые сочетания  $X$  и  $Y$ ?

б) Экономический кризис привел к сокращению возможностей фирмы. Теперь на финансирование производства она может потратить не более 205 ден. ед. Какое количество  $X$  и  $Y$  следует теперь производить фирме, чтобы получить максимальную прибыль?

*Решение*

**А) (15 баллов за пункт)**

Прежде всего, полезно определить оптимальный выпуск фирмы при отсутствии финансовых ограничений, чтобы выяснить, являются ли финансовые возможности фирмы лимитирующим фактором.

Так как товары  $X$  и  $Y$  производятся независимо друг от друга, то фирма получит максимум прибыли в том случае, если будет максимальна прибыль от каждого продукта.

Поскольку функция прибыли для каждого продукта – парабола ветвями вниз, то:

$$\begin{cases} MR(X) = MC(X) \\ MR(Y) = MC(Y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20 - 2X = 10 \\ 75 - 4Y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 5 \\ Y = 15 \end{cases}$$

$$TC(X = 5, Y = 15) = 10 \cdot 5 + 5 + 15 \cdot 15 + 10 = 290$$

То есть для производства оптимального набора, максимизирующего прибыль, необходимо 290 ден. ед., а не 300. Значит, финансовые ресурсы в данном случае не являются лимитирующими.

**Б) (10 баллов за пункт)**

В данном случае нужно максимизировать прибыль при ограниченных финансовых возможностях:

$$\begin{cases} \pi = (20 - X) \cdot X + (75 - 2Y) \cdot Y - 10X - 5 - 15Y - 10 \rightarrow \max \\ TC = 10X + 5 + 15Y + 10 = 205 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi = 10X - X^2 + 60Y - 2Y^2 - 15 \rightarrow \max \\ 10X + 15Y = 190 \end{cases} \quad (1)$$

Из ограничения (1):  $X = 19 - 1.5Y$

Подставим в целевую функцию и найдем ее максимум:

$$\pi = 190 - 15Y - (19 - 1.5Y)^2 + 60Y - Y^2 - 15 = (175 - 361) + 102Y - 4.25Y^2$$

$$\frac{d\pi}{dY} = 102 - 8.5Y = 0$$

$$Y = 12$$

$$X = 1$$

*Ответ:* а) 5 единиц товара  $X$  и 15 единиц товара  $Y$ ; б) 1 единица товара  $X$  и 12 единиц товара  $Y$ .

#### **Задача 4. Молодильные яблоки (25 баллов)**

В Тридевятом Царстве спрос на молодильные яблоки в 2014 году описывался функцией  $Q_d = 40 - 2P$ , а предложение — функцией  $Q_s = 16P/3 - 100/3$ , где  $Q$  — количество молодильных яблок в тоннах, а  $P$  — цена тонны яблок в рубликах. В 2015 году спрос на молодильные яблоки не изменился, а вот предложение выросло, да так, что продавцы готовы теперь при любом уровне цен поставлять на продажу на 50 % яблок больше по сравнению с прошлым годом. Казалось бы, хороший урожай должен был обрадовать продавцов яблок, однако этого не случилось, и обратились они к царю с

просьбой оказать содействие и выделить средства из казны для их поддержки.

а) Проведя необходимые расчеты, объясните, почему большой урожай не обрадовал продавцов молодильных яблок.

б) Царь дал распоряжение своим советникам — молодому и старому — подготовить рекомендации по оказанию поддержки продавцам молодильных яблок.

- Молодой советник предложил удержать цену на уровне прошлого года, скупив часть яблок, чтобы потом, если получится, продать их в Тридесятое Государство.
- Старый советник предложил не торопиться, а подождать до окончания сезона торговли яблоками, а потом выплатить всем продавцам разницу фактических цен этого и прошлого года. По его мнению, этот вариант обойдется дешевле для государственной казны.

Царь согласился с его доводами и подписал соответствующий указ, решив, что обнародует его после установления нового рыночного равновесия в 2015 году. Действительно ли рекомендации старого советника обойдутся государственной казне дешевле, если они не будут обнародованы до установления нового равновесия?

в) Когда царь беседовал со своими советниками, их разговор подслушал шут. У него родилась идея, как можно использовать полученную конфиденциальную информацию для личного обогащения. Все продумав и просчитав, он решил поделиться своими соображениями с представителями продавцов молодильных яблок до принятия ими решения о том, какой объем продавать в 2015 году. Шут попросил за свои услуги 20 % от суммы, которую получают продавцы яблок из государственной казны, если воспользуются его рекомендациями. Какие рекомендации разработал хитрый шут? Какую сумму он рассчитывает получить за свои «услуги»?

г) Покажите на графике расходы государственной казны в каждом из следующих случаев:

- Были бы приняты рекомендации молодого советника.
- Принятые рекомендации старого советника оставались бы тайной до установления нового равновесия.
- Продавцы яблок последуют рекомендациям хитрого шута.

### ***Решение***

а) Найдем равновесие для ситуации прошлого года.

Приравняв функции спроса и предложения, получаем:  $40 - 2P = \frac{16}{3}P - \frac{100}{3}$  ;

$P_0 = 10$  рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что  $Q_0 = 40 - 2 \cdot 10 = 20$  тонн.

Это значит, что выручка продавцов яблок в прошлом году была равна  $(10 \cdot 20) = 200$  рубликов.

Найдем равновесие для ситуации нового года.

Новая функция предложения будет иметь вид  $Q_s = 1,5 \cdot (\frac{16}{3}P - \frac{100}{3}) = 8P - 50$ .

Приравняв функцию спроса и новую функцию предложения, получаем:  $40 - 2P = 8P - 50$ ;  $P_1 = 9$  рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что  $Q_1 = 40 - 2 \cdot 9 = 22$  тонны.

Это значит, что выручка продавцов яблок в новом году должна составить  $(9 \cdot 22) = 198$  рубликов.

Итак, большой урожай яблок не обрадовал продавцов, так как несмотря на рост продаж их выручка в итоге снизится (198 меньше 200).

Дело в том, что при данном изменении цены спрос характеризуется как неэластичный, поэтому снижение цены приводит к снижению выручки.

б) **Рекомендации молодого советника** – скупить излишки яблок на рынке. При цене 10 рубликов величина спроса на рынке яблок – 20 тонн, а величина предложения  $(8 \cdot 10 - 50) = 30$  тонн.

Излишек яблок на рынке равен  $30 - 20 = 10$  тонн. Если их скупать по цене 10 рубликов, то расходы казны составят  $10 \cdot 10 = 100$  рубликов.

**Рекомендации старого советника** – дожидаться окончания торгов без вмешательства со стороны государства, а потом компенсировать снижение цены.

На эти цели придется выделить  $(10 - 9) \cdot 22 = 22$  рублика.

Это меньше, чем расходы, связанные с рекомендациями молодого советника.

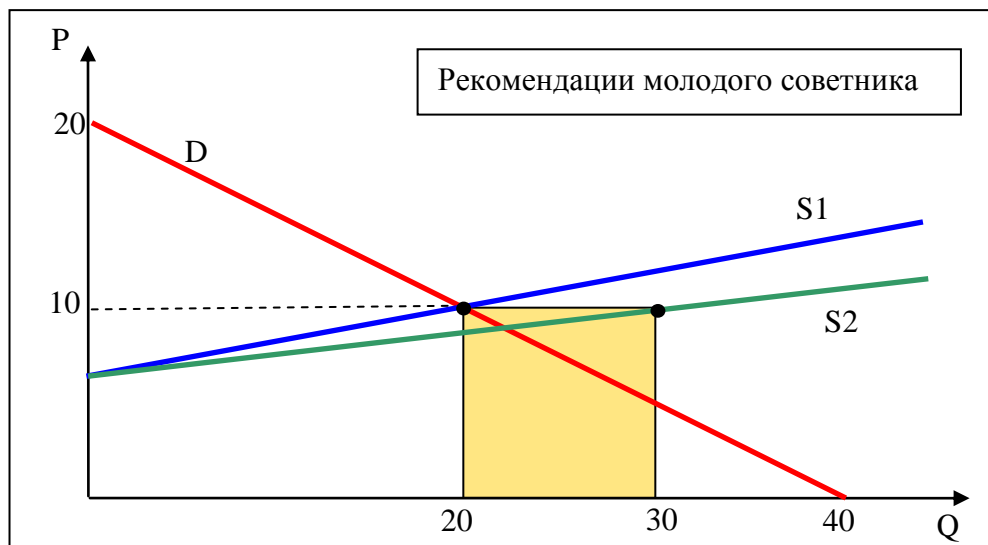
Таким образом, приняв рекомендации старого советника, можно сэкономить  $(100 - 22 = 78)$  рубликов.

в) Шут предложил продавцам яблок вынести на продажу такое количество яблок, которое они готовы продать по прошлогодней цене, т.е. 30 тонн, а цену держать, соответствующую спросу. Найдем эту цену из уравнения  $40 - 2P = 30$ , т.е. цену надо установить 5 рубликов за тонну. Тогда государственная казна, согласно подготовленному указу царя, с каждой проданной тонны яблок будет компенсировать  $(10 - 5 = 5)$  рубликов. Всего из казны будет выплачено  $5 \cdot 30 = 150$  рубликов.

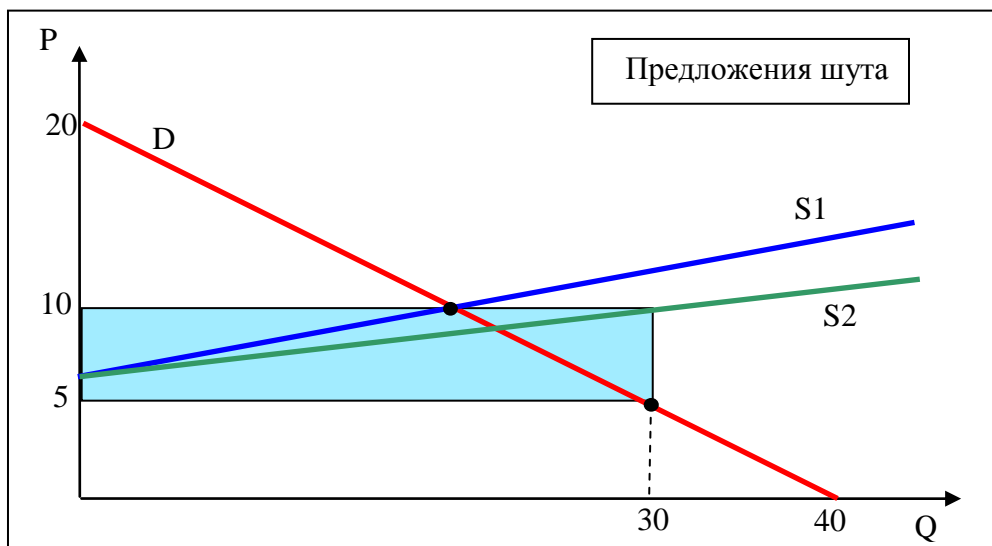
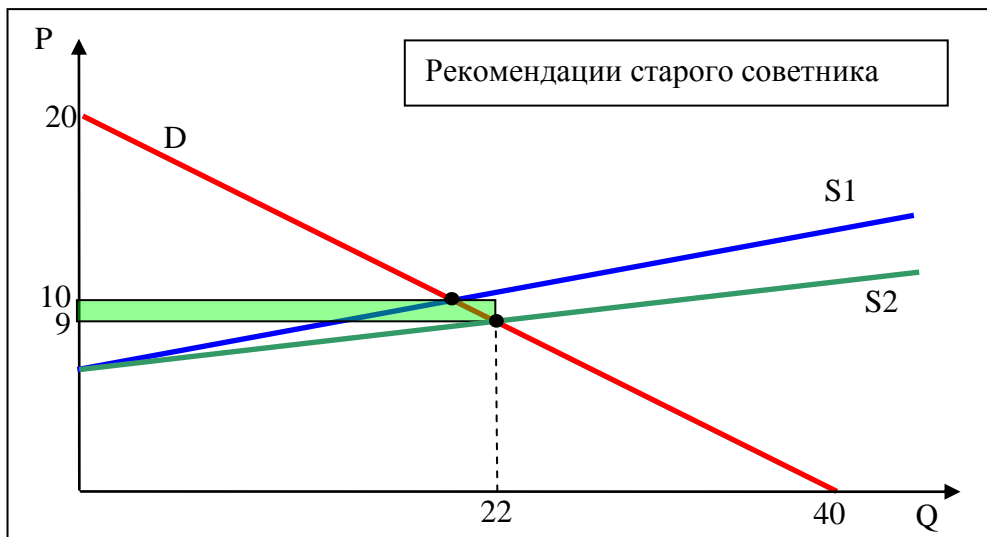
Двадцать процентов от этой суммы – это вознаграждение шута, которое составит  $150 \cdot 0,2 = 30$  рубликов.

(Возможны и иные варианты рекомендаций шута, однако они требуют грамотного обоснования).

г) Смотри рисунки.







**Критерии оценивания**

- а) Расчет выручки прошлого и текущего года и вывод об изменении выручки – **4 балла**.
- б) Оценка расходов казны по рекомендациям советников царя – **6 баллов** (по 3 балла за расчет расходов казны по оценкам каждого из советников).
- в) Оценка расходов казны после разглашения шутком инсайдерской информации и расчет причитающегося ему в этом случае вознаграждения – **9 баллов**.
- г) Построение графиков – **6 баллов** (по 2 балла за каждый график).