Олимпиада по экономике для учащихся 11-х классов.
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

25февраля 2015 год.

Всего за задачи 100 баллов **Время выполнения 140 минут**

Задача 1. Аннуитет Ерофея (25 баллов)

Ерофей взял в «Бета-банке» кредит на сумму B на срок 12 месяцев по ставке $(100r)\%$ в месяц. Договор предусматривает погашение кредита по популярной *аннуитетной* схеме: в конце каждого месяца банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $(100r)\ \%$), а затем Ерофей переводит в банк некий фиксированный платеж. Банк рассчитал, что, для того чтобы долг был полностью выплачен за 12 месяцев, этот платеж должен равняться X.

а) Выразите B через X и r.

б) В конце третьего месяца Ерофей неожиданно получил на работе премию и решил погасить часть кредита досрочно. При досрочном погашении банк производит перерасчет платежа, который заемщик должен будет ежемесячно вносить в оставшиеся месяцы. Какую сумму Ерофей должен вернуть банку (помимо X) в конце третьего месяца, чтобы в месяцы с 4-го по 12-й платить не X, а Y, где $Y < X$? Ответ выразите через X, Y и r.

Решение

а) **(12 баллов за пункт)** Обозначим сумму долга Ерофея в конце месяца i за D_i. $D_1 = (1+r)B - X$; $D_2 = (1+r)D_1 - X = (1+r)^2B - (1+r)X - X$; $D_3 = (1+r)D_2 - X = (1+r)^3B - (1+r)^2X - (1+r)X - X$. Заметив закономерность, получаем, что $D_{12} = (1+r)^{12}B - (1+r)^{11}X - \cdots - (1+r)X - X$.**(10 баллов)**

С другой стороны, $D_{12} = 0$. **(1 балл)**Выражая из этого уравнения B, получаем, что

$$B = \frac{X}{1+r} + \frac{X}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{X}{(1+r)^{12}}.$$ **(1 балл)**

Иными словами, первоначальная сумма долга равна приведенной стоимости всех будущих платежей по кредиту. Сумму, стоящую в правой части, можно свернуть по формуле суммы геометрической прогрессии. Окончательно получаем, что

$$B = \frac{X}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{12}}\right).$$

б) **(13 баллов за пункт)**

Решение 1 (эвристическое)

Обозначим сумму, которую заемщик возвращает досрочно, за Z. Заплатив Z в конце третьего месяца, заемщик в замен получает экономию $(X - Y)$ в платежах, которые он будет делать в месяцы с 4-ый по 12-ый. Таким образом, ситуация эквивалентна тому, что банк в начале четвертого месяца берет у Ерофея «кредит» в размере Z, который он затем возвращает Ерофею по аннуитетной схеме с ежемесячным «платежом» $X - Y$. Ставка «кредита» по-прежнему равна $(100r)\%$ в месяц, а срок «кредита» составляет 9 месяцев. Формулу, выражающую сумму кредита через размер платежа и ставку процента, мы уже нашли в пункте (а); необходимо только заменить в ней X на $(X-Y)$, B на Z и 12 на 9.

Таким образом,

$$Z=\frac{X-Y}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).$$

Решение 2 (непосредственное)

Обозначим сумму долга на конец третьего месяца до внесения заемщиком дополнительного взноса Z, за D_3, после внесения суммы Z — за $D_3{}'$. Таким образом, искомая величина Z равна $D_3-D_3{}'$.**(1 балл)**

Если бы Ерофей не внес сумму Z, то имели бы место следующие соотношения: $D_4=(1+r)D_3-X$; $D_5=(1+r)D_4-X=(1+r)^2D_3-(1+r)X-X$, и т. д.; $D_{12}=(1+r)^9D_3-(1+r)^8X-\cdots-(1+r)X-X=0$.**(5 баллов)**

По аналогии с пунктом а), отсюда получаем, что сумма D_3 равна приведенной стоимости всех будущих платежей по кредиту, то есть

$$D_3=\frac{X}{1+r}+\frac{X}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{X}{(1+r)^9}=\frac{X}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).$$ **(1 балл)**

(Это выражение также можно получить, если в выражение $D_3=(1+r)^3B-(1+r)^2X-(1+r)X-X$ подставить выражение для B, найденное нами в пункте (а).)

Аналогичным образом, можно показать, что сумма $D_3{}'$ также должна быть равна приведенной стоимости будущих платежей по кредиту, только теперь, после внесения Z, каждый из платежей равен не X, а Y:

$$D_3{}'=\frac{Y}{1+r}+\frac{Y}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{Y}{(1+r)^9}=\frac{Y}{\mathrm{r}}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).$$ **(6 баллов)**

В итоге,

$$Z=D_3-D_3{}'=\frac{X-Y}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^9}\right).$$

Задача 2. Молодильные яблоки (25 баллов)

В Тридевятом Царстве спрос на молодильные яблоки в 2014 году описывался функцией $Q_d=40-2P$, а предложение — функцией $Q_s=16P/3-100/3$, где Q — количество молодильных яблок в тоннах, а P — цена тонны яблок в рубликах. В 2015 году спрос на молодильные яблоки не изменился, а вот предложение выросло, да так, что продавцы готовы теперь при любом уровне цен поставлять на продажу на 50 % яблок больше по сравнению с прошлым годом. Казалось бы, хороший урожай должен был обрадовать продавцов яблок, однако этого не случилось, и обратились они к царю с просьбой оказать содействие и выделить средства из казны для их поддержки.

а) Проведя необходимые расчеты, объясните, почему большой урожай не обрадовал продавцов молодильных яблок.

б) Царь дал распоряжение своим советникам — молодому и старому — подготовить рекомендации по оказанию поддержки продавцам молодильных яблок.

- Молодой советник предложил удержать цену на уровне прошлого года, скупив часть яблок, чтобы потом, если получится, продать их в Тридесятое Государство.
- Старый советник предложил не торопиться, а подождать до окончания сезона торговли яблоками, а потом выплатить всем продавцам разницу фактических цен этого и прошлого года. По его мнению, этот вариант

обойдется дешевле для государственной казны.

Царь согласился с его доводами и подписал соответствующий указ, решив, что обнародует его после установления нового рыночного равновесия в 2015 году. Действительно ли рекомендации старого советника обойдутся государственной казне дешевле, если они не будут обнародованы до установления нового равновесия?

в) Когда царь беседовал со своими советниками, их разговор подслушал шут. У него родилась идея, как можно использовать полученную конфиденциальную информацию для личного обогащения. Все продумав и просчитав, он решил поделиться своими соображениями с представителями продавцов молодильных яблок до принятия ими решения о том, какой объем продавать в 2015 году. Шут попросил за свои услуги 20 % от суммы, которую получат продавцы яблок из государственной казны, если воспользуются его рекомендациями. Какие рекомендации разработал хитрый шут? Какую сумму он рассчитывает получить за свои «услуги»?

г) Покажите на графике расходы государственной казны в каждом из следующих случаев:

- Были бы приняты рекомендации молодого советника.
- Принятые рекомендации старого советника оставались бы тайной до установления нового равновесия.
- Продавцы яблок последуют рекомендациям хитрого шута.

Решение

а) Найдем равновесие для ситуации прошлого года.

Приравняв функции спроса и предложения, получаем: $40-2P=\frac{16}{3}P-\frac{100}{3}$;

$P_0=10$ рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что $Q_0=40-2\cdot 10=20$ тонн.

Это значит, что выручка продавцов яблок в прошлом году была равна (10·20)=200 рубликов.

Найдем равновесие для ситуации нового года.

Новая функция предложения будет иметь вид $Qs=1{,}5\cdot(\frac{16}{3}P-\frac{100}{3})=8P-50$.

Приравняв функцию спроса и новую функцию предложения, получаем: $40-2P=8P-50$; $P_1=9$ рубликов.

Подставив цену в функцию, например, спроса находим, что $Q_1=40-2\cdot 9=22$ тонны.

Это значит, что выручка продавцов яблок в новом году должна составить (9·22)=198 рубликов.

Итак, большой урожай яблок не обрадовал продавцов, так как несмотря на рост продаж их выручка в итоге снизится (198 меньше 200).

Дело в том, что при данном изменении цены спрос характеризуется как неэластичный, поэтому снижение цены приводит к снижению выручки.

б) **Рекомендации молодого советника** – скупить излишки яблок на рынке. При цене 10 рубликов величина спроса на рынке яблок – 20 тонн, а величина предложения (8·10-50)=30 тонн.

Излишек яблок на рынке равен 30-20=10 тонн. Если их скупать по цене 10 рубликов, то расходы казны составят 10·10=100 рубликов.

Рекомендации старого советника – дождаться окончания торгов без вмешательства со стороны государства, а потом компенсировать снижение цены.

На эти цели придется выделить (10–9) 22=22 рублика.

Это меньше, чем расходы, связанные с рекомендациями молодого советника.

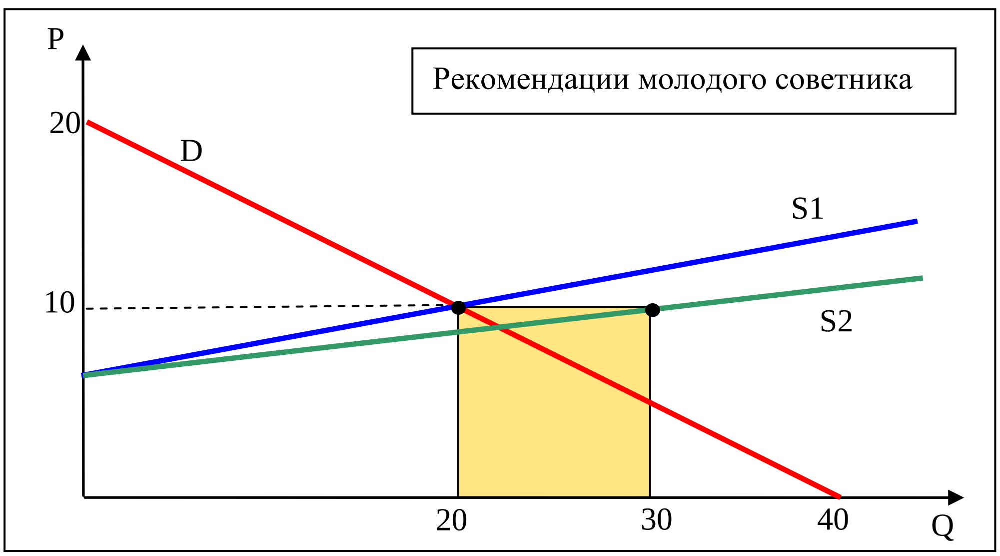
Таким образом, приняв рекомендации старого советника, можно сэкономить (100–22=78) рубликов.

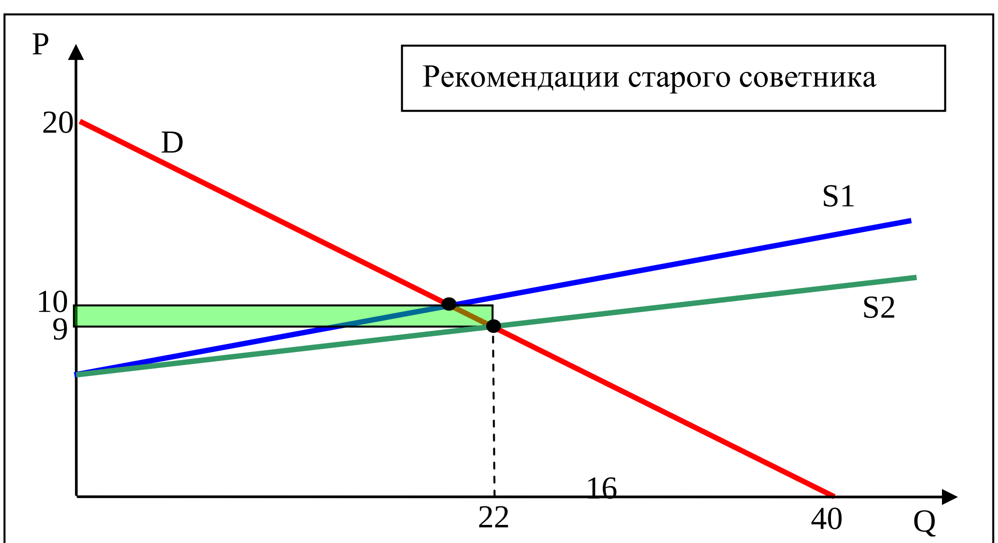
в) Шут предложил продавцам яблок вынести на продажу такое количество яблок, которое они готовы продать по прошлогодней цене, т.е. 30 тонн, а цену держать, соответствующую спросу. Найдем эту цену из уравнения $40-2P=30$, т.е. цену надо установить 5 рубликов за тонну. Тогда государственная казна, согласно подготовленному указу царя, с каждой проданной тонны яблок будет компенсировать (10–5=5) рубликов. Всего из казны будет выплачено 5·30= 150 рубликов.

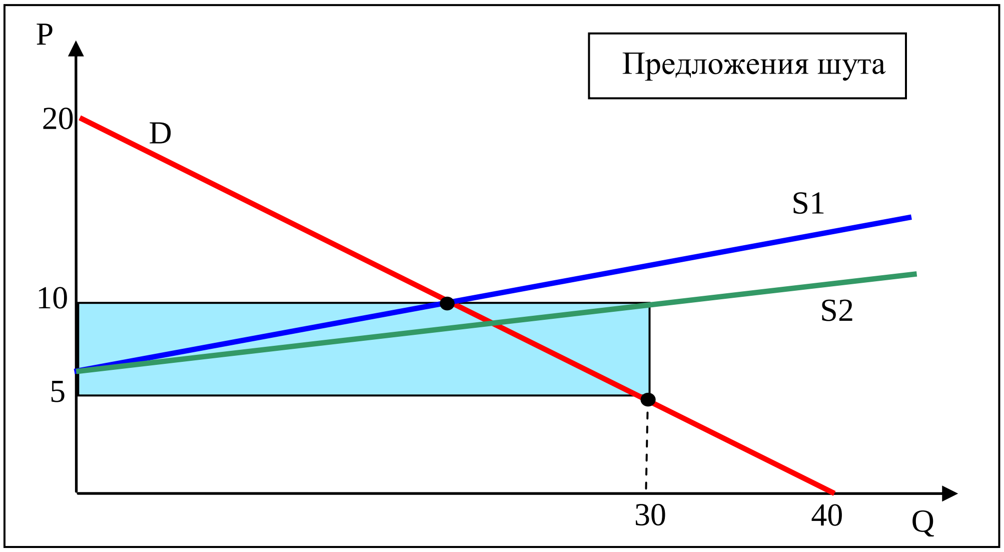
Двадцать процентов от этой суммы – это вознаграждение шута, которое составит 150·0,2=30 рубликов.

(Возможны и иные варианты рекомендаций шута, однако они требуют грамотного обоснования).

г) Смотри рисунки.







Критерии оценивания

а) Расчет выручки прошлого и текущего года и вывод об изменении выручки – **4 балла.**

б) Оценка расходов казны по рекомендациям советников царя – **6 баллов** (по 3 балла за расчет расходов казны по оценкам каждого из советников).

в) Оценка расходов казны после разглашения шутом инсайдерской информации и расчет причитающегося ему в этом случае вознаграждения – **9 баллов.**

г) Построение графиков – **6 баллов** (по 2 балла за каждый график).

Задача 3. Жюльен из мухоморов — 2 (25 баллов)

Жюльен из мухоморов — деликатес, пользующийся особой популярностью среди гномов. Рецепт его приготовления, однако, известен только лесным гномам. Министр финансов королевства лесных гномов решил организовать продажу деликатеса соседям — горным гномам. Он настоял на том, что экспорт жульена должен быть государственной монополией, которая будет максимизировать прибыль.

Приготовленный жюльен герметично упаковывается в *кокотницы* (маленький металлический ковшик для подачи жюльена) и расфасовывается по 4 кокотницы в коробку. Издержки производства жюльена описываются функцией $TC = 20 + 10q + q^2/2$, где q— количество кокотниц. Спрос на деликатес в стране горных гномов описывается функцией $N = 225 - 0{,}5P$, где N— количество коробок, покупаемых за неделю, P— цена за коробку.

Король горных гномов ввел пошлину на ввоз жюльена в размере 10 ден. ед. с каждой ввозимой коробки. Кроме того, дорога в королевство горных гномов лежит через страну эльфов, которые за провоз товара по своей территории забирают 5 коробок жюльена каждую неделю.

Оценив потери государственной монополии от поборов эльфов, министр финансов лесных гномов решил попробовать договориться с ними о замене натурального платежа денежным (также не зависящим от объема продаж). Более того, он убедил министра финансов королевства горных гномов, что замена натурального платежа за провоз жюльена по территории страны эльфов денежным увеличит доходы и казны королевства горных гномов. Поэтому министры договорились, что платить эльфам денежный налог они будут совместно.

Какую наибольшую сумму денежного налога гномы будут готовы сообща платить эльфам за отмену натурального налога?

Решение
Гномы могут предложить эльфам не больше, чем они выиграют от отмены натуральной платы за провоз.
Рассчитаем прибыль от продажи жюльена и доходы от налогов при условии натуральной платы за провоз.

$$N = \frac{q}{4} \to q = 4N$$

$$TC = 20 + 10 \cdot 4N + 0.5(4N)^2 = 20 + 40N + 8N^2$$

Также в функции издержек нужно учесть выплачиваемую пошлину 10 ден. ед. за коробку и что за 5 коробок пошлина не вносится, так как они изымаются эльфами:

$$TC = 20 + 40N + 8N^2 + 10(N - 5) = 50N + 8N^2 - 30$$

Функция дохода от продажи:

$$TR = \left(450 - 2(N - 5)\right) \cdot (N - 5) = -2N^2 + 470N - 2300$$

Функция прибыли – парабола, ветви которой направлены вниз. Поэтому ее максимум находим из равенства $MC = MR$

$50 + 16N = -4N + 470$
$20Q = 420$
$N = 21$
$P = 450 - 2(21 - 5) = 418$
$TR = (21 - 5) * 418 = 6688$
$TC = 50 \cdot 21 + 8 \cdot 21^2 - 30 = 4548$
$\pi = 2140$ ***(15 баллов за верное определение прибыли)***
Доходы казны горных гномов: $10 \cdot (21 - 5) = 160$

(1 балл за верное определение доходов казны)

Теперь рассмотрим ситуацию без натуральной платы за провоз. Тогда

$TC = 20 + 40Q + 8Q^2 + 10Q = 20 + 50Q + 8Q^2$
$TR = (450 - 2Q) \cdot Q$
$MC = 50 + 16Q = 450 - 4Q = MR$
$Q = 20$
$P = 410$
$TR = 8200$
$TC = 4220$
$\pi = 3980$ ***(5 баллов за верное определение прибыли)***
Налоговые поступления в казну горных гномов $20 \cdot 10 = 200$ ден. ед.

(1 балл за верное определение доходов казны)

Таким образом, от (полной) отмены натуральной платы выигрыш лесных гномов 1840 ден. ед., выигрыш горных гномов 40 ден. ед.

Очевидно, сумма этих выигрышей (1880 ден. ед.) и есть максимальная величина оплаты, которую гномы могут предложить эльфам за проезд по их территории. ***(3 балла)*** Если она фиксирована, то выступает как постоянные издержки и не влияет на выбор объема производства лесными гномами, уменьшается только их прибыль. Доходы казны горных гномов в таком случае также зависят только от величины суммы, которую они будут платить эльфам.

Ответ: 1880 ден. ед. – максимальная плата, которую могут предложить гномы вместо натурального платежа. При такой плате весь выигрыш гномов сводится к нулю, но они и не проигрывают. При плате меньшей 1880 ден. ед. у гномов появляется выигрыш.

Задача 4. Счастливые часы (25 баллов)

Сеть кафе «У Аристарха» имеет сотни заведений по всему городу. Владелец сети, Аристарх, заметил, что в разное время дня разное количество посетителей хотят заказать фирменное блюдо его ресторанов. Все рестораны открываются в 12 часов, и если одна порция стоит p рублей, в первый час работы посетители покупают $q = 132 - p$ тыс. порций во всей сети. В последний час работы кафе (с 21 до 22 часов) посетители заказывают $q = 141 - p$ тыс. порций. Аристарх вывел следующую зависимость купленных порций от цены и времени: если в период с t до $t + 1$ часов (t— целые числа от 12 до 21) цена составляет p рублей за порцию, то общее количество купленных порций за это время составляет $q = 120 + t - p$ тыс. Производство одной порции стоит 40 рублей, владелец сети старается сделать так, чтобы прибыль (разница между его доходами и расходами) за день работы была максимальной. Считайте, что кроме фирменного блюда в кафе ничего не продается.

а) Какую цену нужно установить Аристарху, если он не хочет менять ее в течение дня?

б) Сын Аристарха, Ксенофонт, предложил папе ввести в его ресторанах «счастливые часы»: назначать одну цену на фирменное блюдо утром (с открытия до X часов) и другую цену вечером (с X часов до закрытия). «Счастливыми часами» называется тот период, когда цена ниже. Не проводя расчетов, объясните, в какое время (в первой части дня или во второй) Аристарху нужно устроить «счастливые часы», и предположите, в какую сторону утренняя и вечерняя цена будет отличаться от цены в пункте а). Приведите содержательное объяснение, почему прибыль при такой политике может увеличиться.

в)Рассчитайте оптимальную длину счастливых часов.

Решение

а) **(8 баллов за пункт)** Считая, что в каждый из рабочих часов в кафе продается ненулевое количество порций, найдем общий спрос:

$Q = (132 - p) + (133 - p) + \cdots + (141 - p) = 1365 - 10p.$ **(4 балла)**

Тогда прибыль за день будет равна:

$$\pi = (1365 - 10p)(p - 40).$$

Эта функция является квадратичной параболой с ветвями вниз, вершина ее будет максимумом **(1 балл)**. Она расположена посередине между нулями функции:

$$p = \frac{136{,}5 + 40}{2} = 88{,}25.$$

(3 балла) Это и есть оптимальная цена.

б) Можно заметить, что по мере приближения вечера спрос на фирменное блюдо становится численно больше, а эластичность его снижается. Поскольку издержки не меняются в течение дня, это означает, что цена должна быть выше вечером. **(5 баллов)**

в) **(12 баллов за пункт)** Пусть T— длина счастливых часов, p_1 — цена во время счастливых часов, p_2 — цена после их окончания. Тогда спрос в счастливые часы составит:

$$Q_1 = (132 - p_1) + (133 - p_1) + \cdots + (132 + (T-1) - p_1) = T \cdot \left(131{,}5 + \frac{T}{2} - p_1\right)$$

(3 балла) (свернуто по формуле суммы арифметической прогрессии: количество членов, умноженное на среднее арифметическое между первым и последним). Спрос после окончания счастливых часов составит:

$$Q_2 = (132 + T - p_2) + \cdots + (141 - p_2) = (10 - T) \cdot \left(136{,}5 + \tfrac{T}{2} - p_2\right).$$ **(3 балла)**

Тогда функция прибыли имеет вид:

$$\pi = T \cdot \left(131{,}5 + \tfrac{T}{2} - p_1\right)(p_1 - 40) + (10 - T) \cdot \left(136{,}5 + \tfrac{T}{2} - p_2\right)(p_2 - 40).$$ **(1 балл)**

Допустим, T — какая-то длина счастливых часов. Тогда цены, максимизирующие прибыль, можно найти как вершины двух парабол с ветвями вниз — первого и второго слагаемого в функции прибыли. При максимизации всей функции ни одна из этих цен не оказывает влияния на «чужую» часть прибыли, поэтому параболы можно максимизировать отдельно. **(рассуждение о параболах и способе максимизации — 3 балла)**

Получаем:

$$p_1^* = 85{,}75 + \frac{T}{4}, \qquad p_2^* = 88{,}25 + \frac{T}{4}.$$

Осталось подставить найденные значения в функцию прибыли:

$$\pi = T \cdot \left(131{,}5 + \frac{T}{2} - \left(85{,}75 + \frac{T}{4}\right)\right)(p_1 - 40) + (10 - T) \cdot \left(136{,}5 + \frac{T}{2} - \left(88{,}25 + \frac{T}{4}\right)\right)(p_2 - 40).$$

Упрощая, получаем:

$$\pi = T \cdot \left(45{,}75 + \frac{T}{4}\right)^2 + (10 - T) \cdot \left(48{,}25 + \frac{T}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}(-T^2 + 10T + 37249).$$

Эта квадратичная парабола с ветвями вниз имеет максимум в точке $T^* = 5$ **(2 балла)**, это и есть оптимальная длина счастливых часов. Можно убедиться, что цена в первой части дня равна 87, а во второй части дня цена равна 89,5, то есть вечерняя цена, как и было предсказано в пункте б), выше.

Председатель оргкомитета, В.Н. Щукин
начальник управления образовательной политики

ДЛЯ ДОКУМЕНТОВ