**XVIII МЕЖРЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ШКОЛЬНИКОВ «СИБИРИАДА. ШАГ В МЕЧТУ»** ***2011 года г. Бердск***

**Олимпиада по экономике для учащихся 9-11-х классов**
**2 тур.**
**Решебник.**

**Задача 1. (10 баллов) (Д. А. Фёдоровых)**
Фирма, не имеющая рыночной власти ни на одном рынке, используя труд как единственный фактор производства и производя с его помощью товары $A$ и $B$, нанимала 5 рабочих по ставке оплаты труда, равной 10, и продавала 23 единицы товара $A$ по цене 3 рубля за штуку и 15 единиц товара $B$ по цене 2 рубля за штуку. В результате роста спроса цены товаров выросли: товар $A$ теперь стоит 4 рубля за штуку, а товар $B$ — 3 рубля за штуку. Ставка заработной платы также повысилась и составила 12. В новых условиях фирма решила нанять 7 рабочих и продать 25 единиц товара $A$ и 19 единиц товара $B$, при этом ее технология производства не изменилась. Если считать, что цель фирмы — получение наибольшей прибыли, то можно ли сделать вывод, рационально ли поступила фирма после изменения цен?

***Решение***

После роста спроса фирма стала получать прибыль, равную $25 \cdot 4 + 19 \cdot 3 - 7 \cdot 12 = 73$. Однако известно, что ее технология позволяет производить 23 единицы товара $A$ и 15 единиц товара $B$, нанимая 5 рабочих. Если бы фирма поступила так после изменения цен, то получила бы прибыль, равную $23 \cdot 4 + 15 \cdot 3 - 5 \cdot 12 = 77$. Таким образом, существует способ получить прибыль б**о**льшую, чем фирма получила фактически, то есть она повела себя нерационально. Заметим, что это не означает, что 77 является максимально возможной прибылью, а не менять количество рабочих и объемы выпуска — рациональным решением, но эти факты и не требуются для ответа на вопрос задачи.

**Задача 2. (12 баллов) (Д. А. Фёдоровых)**
В племени Мумба-Юмба $N$ человек ($N \geq 1$), каждый из которых ходит на охоту в лес. $i$-й соплеменник каждый день тратит на охоту долю $c_i$ своего времени ($0 \leq c_i \leq 1$) и приносит $y_i$ условных единиц добычи, при этом его производственная функция задается формулой $y_i = \sqrt{c_i}$. Каждый вечер, после возвращения охотников из леса, все соплеменники собираются вокруг костра и съедают всю принесенную за день добычу (каждый — свою), танцуя ритуальные танцы. Исследование, проведенное антропологами, показало, что $i$-й член племени оценивает свое удовольствие от прожитого дня в $u_i$ единиц удовольствия, причем $u_i = x_i - c_i + R$, где $x_i$ — количество съеденной добычи, а $R$ — удовольствие от ритуальных танцев, которое всегда одинаковое и ни от чего не зависит. Каждый член племени стремится получить как можно больше удовольствия.

а) Сколько добычи каждый соплеменник будет приносить из леса в день, сколько времени будет тратить на охоту и какое удовольствие получать?

б) Выступая с новогодним обращением, вождь племени заявил, что отныне вся принесенная добыча будет складываться в одну кучу и затем делиться между всеми соплеменниками поровну. Изменится ли поведение членов племени в этих условиях? Ответьте на вопросы пункта а) и объясните получившиеся результаты.

***Решение***

а) Поскольку каждый соплеменник съедает всю принесенную им добычу, $x_i = y_i = \sqrt{c_i}$ для всех $i$. Поэтому каждый член племени, выбирая, сколько принести

добычи, максимизирует функцию

$$u_i = y_i - y_i^2 + R.$$

Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вниз. Наибольшее значение будет достигаться в вершине параболы:

$$y_i^* = 0{,}5;$$

$$c_i^* = 0{,}25;$$

$$u_i = 0{,}25 + R,$$

то есть каждый соплеменник будет тратить на охоту четверть своего времени, приносить половину условной единицы добычи и получать удовольствие, равное $0{,}25 + R$ единиц.

б) Всякий раз при равномерном разделе добычи будет выполняться:

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j}{N}.$$

Функция, которую максимизирует $i$-й член племени, имеет вид:

$$u_i = x_i - c_i + R = \frac{y_i + \sum_{j \neq i} y_j}{N} - y_i^2 + R,$$

где $\sum_{j \neq i} y_j$ — количество добычи, принесенное всеми участниками, кроме $i$-го. Если воспринимать все переменные, на которые $i$-й участник не влияет, как константы, то данная функция также является квадратичной с максимумом в вершине параболы. Найдем оптимальные значения количества принесенной добычи и времени, проведенного в лесу:

$$y_i^* = \frac{1}{2N};$$

$$c_i^* = \frac{1}{4N^2}.$$

Оптимальное количество принесенной добычи и доля времени, потраченного на охоту, будут одинаковыми для всех участников.

$$u_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j^*}{N} - c_i + R = \frac{y_i^* \cdot N}{N} - c_i^* + R = \frac{1}{2N} - \frac{1}{4N^2} + R.$$

Нетрудно заметить, что результаты не отличаются от ответов пункта а) только при $N = 1$ (действительно, если в племени только один человек, то нет никакой разницы, будет ли он просто съедать добычу или делить ее «поровну»), а при любом $N > 1$ количество принесенной добычи, время, проведенное в лесу, и удовольствие, полученное каждым участником, *уменьшится при введении дележа добычи*, и будет *тем меньше, чем больше людей в племени* (последнее утверждение для значения функции удовольствия можно доказать, показав отрицательность ее производной по $N$ или разности ее значений при $N = k + 1$ и $N = k$). Это происходит потому, что при дележе добычи у каждого участника появляется стимул работать меньше: ведь он понимает, что ему достанется только $1/N$ от того, что он принесет, а долю $\frac{N-1}{N}$ придется отдать соплеменникам. С другой стороны, думает он, б**о**льшая, будет зависеть не от его вклада в общую кучу, а от вклада других членов племени. Чем больше $N$, тем б**о**льшую долю придется отдать другим и тем меньше он сам «почувствует» свой вклад (так, если в племени хотя бы 100 человек, то каждый соплеменник съест всего лишь $1/100$ от того, что принесет, а $99/100$

его собственного ужина составит то, что принесли другие!), то есть тем меньше добычи он захочет принести. От нежелания каждого работать в полную силу, вкладываясь в общественное благо, страдают все члены племени, при том что для каждого из них в отдельности такое его решение является рациональным. Эта проблема в экономической теории получила название *«проблема безбилетника»*.

**Задача 3. (12 балллов) (М. М. Горюнов)**
**(отсутствует в варианте для 9-го класса)**
В Звондурасе производятся только два продукта: выращиваются апельсины и добывается нефть. При этом экспортируется все, что производится. Цена апельсинов на мировом рынке в 2008 году была 10 долларов за кг, цена нефти – 30 долларов за баррель. В производстве используется один фактор – труд, который однороден и продается на совершенно конкурентном рынке. Данные о производственных возможностях Звондураса приведены в таблице. Всего в экономике страны занято 10 000 человек.

| Занятые в отрасли, тыс. чел. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Предельный продукт труда в производстве апельсинов, кг | 60 | 52 | 45 | 39 | 34 | 30 | 27 | 26 | 25 | 25 |
| Общее производство апельсинов, тонн | 80 | 135 | 185 | 228 | 264 | 296 | 324 | 350 | 375 | 400 |
| Предельный продукт труда в производстве нефти, барр | 60 | 47 | 38 | 30 | 23 | 18 | 15 | 12 | 10 | 9 |
| Общее производство нефти, тыс. барр. | 80 | 130 | 170 | 205 | 230 | 250 | 267 | 280 | 290 | 299 |

а) Используя данные таблицы, определите заработную плату в Звондурасе.

б) Пусть в 2009 году цена на нефть выросла в 2 раза, на сколько процентов изменятся номинальный и реальный ВВП Звондураса при прочих равных условиях?

***Решение***
1. Поскольку рынок труда совершенно конкурентный, то зарплата в обеих отраслях должна выровняться и стать равной предельному денежному продукту труда MRPL= MPL*P. Отметим так же, что если в первой отрасли занято N тысяч человек, то во второй (10-N) тысяч человек.

Для решения построим таблицу:

| Занятые в производстве апельсинов, тыс. чел. | 1 | 2 | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Предельный денежный продукт труда в производстве апельсинов, долл. | 600 | 520 | **450** | 390 | 340 | 300 | 270 | 260 | 250 | 250 |
| Занятые в нефтяной отрасли, тыс. человек | 9 | 8 | **7** | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Предельный денежный продукт труда в производстве нефти, долл. | 300 | 360 | **450** | 540 | 690 | 900 | 1140 | 1410 | 1800 | - |

Из таблицы видим, что предельный денежный продукт труда выравнивается при 3 тысячах занятых в производстве апельсинов и 7 тысячах занятых в производстве нефти. Заработная плата равна при этом предельному денежному продукту труда - 450 долл..

2. Отметим, что в 2008 году было произведено 185 тонн апельсинов и 267 тыс. баррелей нефти.

Значит ВВП в 2008 году равнялся (185*10 + 30*267)/1000 = 9,86 млн. долл.

Построим аналогичную таблицу для 2009 года:

| Занятые в производстве апельсинов, тыс. чел. | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Предельный денежный продукт труда в производстве апельсинов, долл. | **600** | 520 | 450 | 390 | 340 | 300 | 270 | 260 | 250 | 250 |
| Занятые в нефтяной отрасли, тыс. человек | **9** | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Предельный денежный продукт труда в производстве нефти, долл. | **600** | 720 | 900 | 1080 | 1380 | 1800 | 22800 | 2820 | 3600 | - |

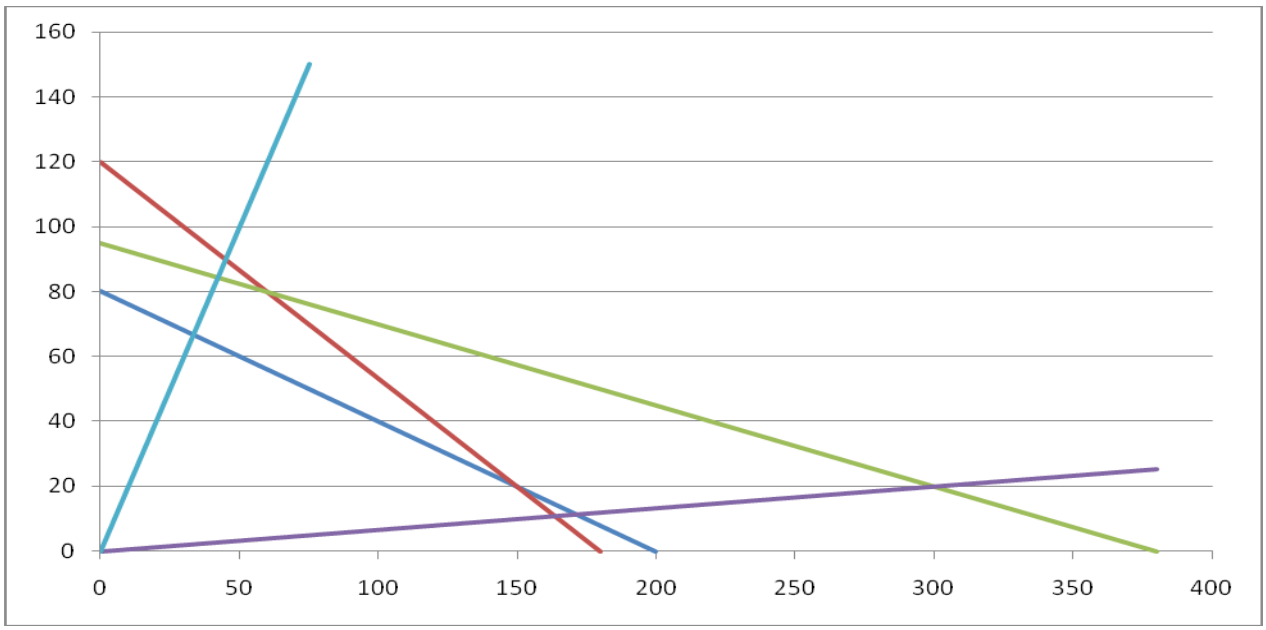
Видим, что в производстве нефти будет занято 9 тыс. человек, а в производстве апельсинов – 1 тыс. человек.
Следовательно, будет произведено 80 тонн апельсинов и 290 тыс. баррелей нефти
ВВП 2009 года в текущих ценах равен (10*80+60*290)/1000 = 18,2 млн долл.
ВВП в ценах 2008 года равен (10*80+30*290)/1000 = 9,5 млн. долл.
Таки образом, номинальный ВВП вырос на (18,2 – 9,86)/9,86 = 84,58%
А реальный ВВП уменьшился на (9,5 – 9,86)/9,86 = 3,65%

**Задача 4. (13 баллов) (Л. С. Весёлая)**
**(Задача 3 варианте для 9-го класса)**
На рынке товара А совокупный спрос формируют две группы покупателей. Спрос каждой группы покупателей и предложение товара А на рынке описываются линейными функциями. Известно, что спрос покупателей *первой* группы характеризуется единичной ценовой эластичностью, когда они выражают готовность приобрести 100 тонн товара А, а спрос покупателей *второй* группы — когда они готовы приобрести 90 тонн. Известно также, что продавцы товара А могли бы получить максимальную совокупную выручку, если бы на рынке установилась цена 47,5 ден. ед. за тонну, позволяющая делать покупки покупателям обеих групп. Но в настоящее время равновесная цена составляет только 20 ден. ед. за тонну, при этом расходы покупателей *первой* группы на покупку товара А равны расходам покупателей *второй* группы, а ценовая эластичность предложения равна 1.

Неожиданный рост цен на сырье, необходимого для производства товара А, может привести к тому, что предложение товара изменится в 30 (!) раз при любом уровне цен. Определите, как и на сколько процентов изменится в этом случае выручка продавцов товара А.

***Решение***
В основе решения лежит следующее утверждение: так как функции спроса линейные, то их можно определить так: Q=a-(a/b)P, а значит выручка продавцов (расходы покупателей) будут максимальными, когда эластичность спроса по цене будет равна (-1), что достигается при P=b/2 и Q=a/2.
Соответственно ПЕРВАЯ группа покупателей бесплатно готова получить максимально 100*2=200 тонн товара А, а ВТОРАЯ группа - 90*2=180 тонн товара А. Вместе они готовы бесплатно получить 200+180=380 тонн товара А.
Совокупный спрос описывается кусочно-линейной функцией, Нам известно, что максимальная выручка достигается при цене, когда на рынке присутствуют обе группы покупателей, а значит если продолжить суммарную функцию спроса до пересечения с осью цен, то мы окажемся в точке P=47,5*2=95. (Ситуацию, соответствующую предположению, что максимум выручки может достигаться в случае когда на рынке остается тольк одна группа

покупателей мы не рассматриваем, так как по условию при цене P=47,5 на рынке покупки совершают обе группы покупателей.) Итак, суммарная функция спроса имеет вид Qd=380-(380/95)P, или Qd=380-4P. Однако это функция описывает только тот участок суммарной функции спроса, когда на рынке присутствуют обе группы покупателей.
Теперь легко найти выручку продавцов в исходном состоянии равновесия Pe=20, Qe=380-4*20=300. И TR=20*300=6000 рублей.
Для того чтобы определиться с новым равновесием, нам надо выяснить какой будет функция предложения и на каком участке совокупного спроса будет оно достигаться равновесие (одна из групп покупателей при высокой цене товара А может покинуть рынок).
Так как нам известно, что предложение имеет единичную эластичность по цене и функция предложения линейна, значит функция предложения проходит через начало координат и через исходную точку равновесия. Легко отсюда определить вид функции предложения Qs=15P.
Соответственно новое предложение будет описываться функцией Qs=(15P)/30=0,5P, поскольку из-за роста цен на сырье предложение УМЕНЬШИЛОСЬ в 30 раз.
Так как нам известно, что при исходной равновесной цене расходы покупателей одинаковы, то значит и одинаковы объемы покупки товара А у каждой группы. И они составляют 150 тонн для каждой группы. Теперь легко восстановить исходные функции спроса покупателей каждой группы (используем подобие треугольников, или построение функции по двум точкам). Получаем – функция спроса ПЕРВОЙ группы покупателей - Qd=200-2,5P и эта группа покупателей готова покупать товар до тех пор пока цена ниже 80 ден.ед. за тонну, а функция спроса ВТОРОЙ группы покупателей - Qd=180-1,5P, и они готовы покупать товар при ценах ниже 120 ден. ед. за тонну. Таким образом, суммарная функция спроса на товар А будет иметь вид:
При ценах от 0 до 80 ден.ед. Qd=380-4P
При ценах от 80 до 120 ден.ед. Qd=180-1,5P
Чтобы определиться с равновесием достаточно выяснить будет ли новая равновесная цена выше или ниже 80 ден.ед. При цене 80 ден.ед. покупатели готовы купить 60 тонн товара, а продавцы готовы продать 40 тонн товара. Возникает дефицит, который ведет к повышению цены товара А. Новое равновесие находим из следующего равенства 180-1,5P=0,5P.
Итак, новое равновесие установится при Pe=90, Qe=45. Выручка продавцов при этом составит 4050 ден.ед.
Таким образом, выручка продавцов должна снизиться на (4050/6000-1)*100%=32,5%.
***Ответ.*** Выручка продавцов снизится на 32,5%.
Графическая иллюстрация решения.




**Задача 5. (13 баллов) (А. Н. Буфетова)**
**(Задача 4 варианте для 9-го класса)**
Фермерское хозяйство производит творог и, являясь единственным продавцом творога на местном рынке, получает от его продажи максимальную прибыль. Издержки производства задаются функцией $TC = 0{,}2 \cdot Q^2 + 10Q + 300$, дневной спрос на творог – функцией $Q = 400 - 4P$, где $Q$ – количество пачек творога (шт.), $P$ – цена одной пачки (ден. ед.).

а) Определите дневной объем продаж и прибыль фермерского хозяйства.

б) При производстве каждой пачки творога остается два литра сыворотки, которую в хозяйстве прежде утилизировали, а теперь решили также продавать. Спрос на сыворотку описывается функцией $Q_C = 120 - 2P_C$ ($Q_C$ — количество сыворотки, литров, $P_C$ цена за один литр, ден. ед.), сыворотку на местном рынке никто еще не продает, затратами на ее упаковку можно пренебречь. Определите, какое количество творога и сыворотки следует продавать, если хозяйство стремится получать максимальную прибыль. На сколько увеличится в этом случае прибыль по сравнению с пунктом а)?

***Решение.***
а) $MC = 0{,}4Q + 10$
$MR = 100 - 0{,}5Q$
$MC = MR \Rightarrow Q = 100$, $P = 75$, $TR = 7500$, $TC = 3300$, $\pi = 4200$.

б) Теперь при производстве каждой пачки творога можно получать доход не только от его продажи, но и от продажи двух литров сыворотки. То есть при прежних издержках доход возрастает. Иными словами производство каждой дополнительной пачки творога приносит не только предельный доход от продажи этой пачки, но и от продажи двух литров сыворотки. А значит предельные издержки следует сравнивать уже с совокупным предельным доходом, получаемым от продажи и творога и сыворотки $MR_{total} = MR_T + MR_C$, где $MR_T = 100 - 0{,}5Q_T$ - предельный доход от продажи творога (см. п.а), $MR_C = TR'_C$ предельный доход от продажи сыворотки. Однако, чтобы предельные доходы можно было складывать (геометрически происходит вертикальное сложение), нужно чтобы они были функциями одной переменной. Запишем функцию дохода от продажи сыворотки $TR_C = P_C \cdot Q_C = (60 - 0{,}5Q_C) \cdot Q_C$ Учитывая, что при производстве одной пачки творога по-

лучается два литра сыворотки, то есть $Q_C = 2Q_T$, произведем замену:
$TR_C = (60 - 0{,}5 \cdot 2Q_T) \cdot 2Q_T = 120Q_T - 2Q_T^2$. Следовательно, $MR_C = 120 - 4Q_T$. Теперь, когда и предельный доход от продажи творога и предельный доход от продажи сыворотки являются функциями от одной переменной, их можно сложить. Однако, следует помнить, что, фирма выбирает оптимальный объем производства из тех, при которых предельный доход положителен ($MR_T \geq 0, MR_C \geq 0$). Поэтому функция совокупного предельного дохода выглядит следующим образом:

$$MR_{total} = \begin{cases} 220 - 4{,}5Q_T, & Q_T \leq 30 \\ 100 - 0{,}5Q_T, & 30 \prec Q_T \leq 200 \end{cases}$$

То есть при продаже 30 пачек творога и меньше предельный доход от продажи как творога, так и сыворотки положителен, следовательно, есть смысл продавать оба продукта в размере объемов производства. При продаже более 30 пачек творога и до 200, предельный продукт от продажи сыворотки становится отрицательным, то есть продажа каждого дополнительного литра уменьшает совокупный доход, и значит, в объеме производства следует продавать только творог, а сыворотку – только в том объеме, который максимизирует выручку ($MR_C = 0$ при $Q_C = 60$), а остальное утилизировать как и ранее. Остается только выяснить оптимальный объем производства из условия равенства предельных доходов и предельных издержек $MR_{total} = MC$.
Функция издержек ввиду того, что затратами на упаковку сыворотки можно пренебречь, остается прежней (пункт а), не меняются и предельные издержки (пункт а). Решая уравнение, получаем: $Q_T = 100, P_T = 75$, то есть оптимальный объем продаж творога больше 30 пачек, а значит, следует продавать сыворотку в количестве, максимизирующем выручку, то есть $Q_C = 60, P_C = 30, TR = 9300, TC = 3300, \pi = 6000, \Delta\pi = 1800$.

То же самое решение можно получить, аккуратно записав функцию прибыли, произведя, как сделано выше, замену переменных в доходе от продажи сыворотки. Только дифференцируя затем функцию прибыли, нужно не забыть проверить предельные доходы на положительность. Иначе ответ будет не верный.

Ответ. а) **100** пачек творога, прибыль **4200** ден. ед.
б) продавать нужно **100** пачек творога и **60** литров сыворотки. Прибыль возрастет на **1800** ден. ед.

***Авторы***
***Анна Николаевна Буфетова*** — к.э.н., старший научный сотрудник ИЭОПП СО РАН, доцент НГУ
***Людмила Степановна Веселая*** — научный сотрудник ИЭОПП СО РАН, старший преподаватель НГУ
***Максим Максимович Горюнов*** — магистрант НГУ.
***Данил Александрович Фёдоровых*** —преподаватель кафедры экономической теории НИУ ВШЭ

Председатель оргкомитета,
начальник управления общего образования
министерства образования, науки и инновационной