

ВТОРОЙ ТУР. ЗАДАЧИ
РЕШЕНИЯ

Задача 1

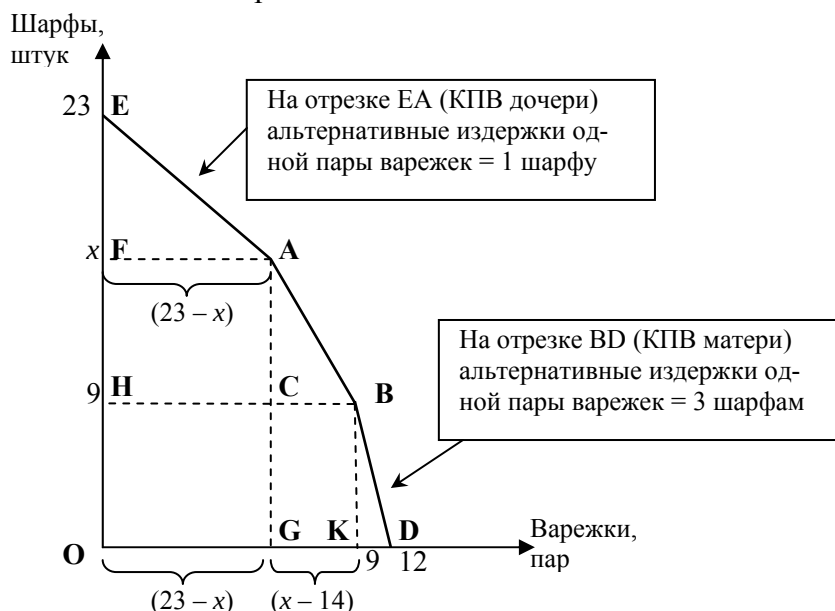
Мама, дочка и бабушка вяжут шарфики и варежки. Альтернативные издержки у каждой из них постоянные. Мама имеет сравнительное преимущество перед дочерью и бабушкой в вязании шарфов, а дочь – сравнительное преимущество перед мамой и бабушкой в вязании варежек.

Если они втроем будут вязать шарфы, то сделают 23 шарфика, а если только варежки – 12 пар. Если они будут действовать экономически рационально и распределять обязанности в соответствии со своими сравнительными преимуществами, то альтернативные издержки вязания первой пары варежек будут равны одному шарфику, а последней пары – 3 шарфикам.

Определите, какое максимально допустимое количество целых шарфиков может связать дочь, если известно, что после отъезда мамы в командировку бабушка с внучкой смогли связать вдвоем только варежки – ровно 9 пар (за то же время, что и прежде).

Решение 1

Изобразим схематично линию производственных возможностей описанной семьи.



1. Поскольку в производстве заняты три человека, то линия производственных возможностей состоит из трех отрезков. Координаты крайних точек КПВ соответствуют максимальному производству шарфов (23) и варежек (12) – точки E и D соответственно.

2. Так как мать имеет сравнительное преимущество в вязании шарфов, то отрезок BD соответствует ее линии производственных возможностей.

Так как дочь имеет сравнительное преимущество в вязании варежек, то отрезок EA соответствует ее линии производственных возможностей. Следовательно, нам нужно оценить, какую максимальную длину может иметь отрезок FE.

3. Когда мама уехала в командировку, линия производственных возможностей стала состоять только из отрезков EA и AB, а максимальный объем связанных варежек сократился до 9 пар – это и есть абсцисса точки B.

4. Так как на отрезке BD альтернативные издержки одной пары варежек = 3 шарфам, то ордината точки B также равна 9 (связав три пары варежек $(12 - 9 = 3)$, придется отказаться от $3 * 3 = 9$ шарфов).

Соответственно меньше 16,5 шарфов мама и бабушка связать не могут. Ближайшее целое число – 17 шарфов. Следовательно максимальное количество, которое может связать дочь равно $23 - 17 = 6$ шарфов.

Ответ: 6 шарфов.

Задача 2

На рынке некоторого товара функции спроса и предложения линейны. В точке равновесия значения коэффициентов ценовой эластичности спроса и предложения совпадают по абсолютному значению и равны 1. После введения потоварной субсидии производителям в размере 4 ден. ед. за каждую единицу товара значение коэффициента эластичности предложения в точке равновесия изменилось на $\frac{1}{4}$.

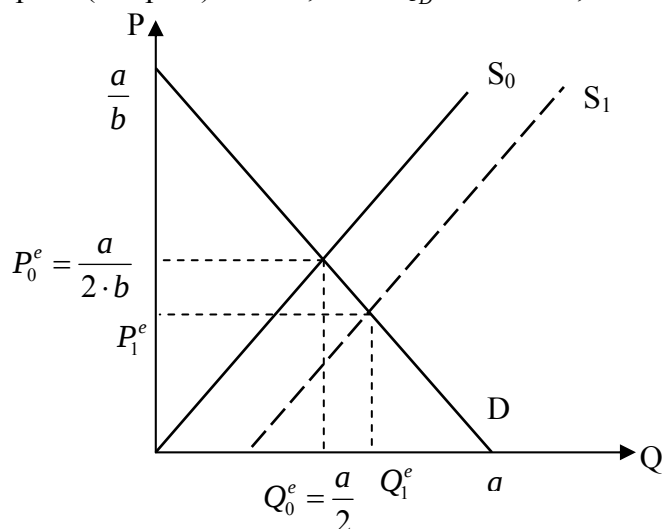
Определите, на сколько процентов изменился объем продаж на рынке с введением субсидии.

Решение

1. Если коэффициент эластичности предложения равен 1 ($E_S = 1$), то функция предложения имеет вид $Q_S = c \cdot P$ (Q – количество товара, штук, P – цена товара, ден. ед., c – положительная константа).

Формально: Пусть $Q = d + c \cdot P$, $c > 0$. Тогда $E_S = \frac{\partial Q_S}{\partial P} \cdot \frac{P^e}{Q^e} = c \cdot \frac{P^e}{d + c \cdot P^e} = 1$, что справедливо только если $d = 0$.

2. Так как функция спроса линейна, а в точке равновесия $|E_D| = 1$, то эта точка находится ровно посередине линии спроса (см. рис.). Тогда, если $Q_D = a - b \cdot P$, $a > 0$, $b > 0$, то $P_0^e = \frac{a}{2 \cdot b}$, $Q_0^e = \frac{a}{2}$.



3. Так как в точке равновесия коэффициенты эластичности спроса и предложения совпадают и равны по абсолютному значению 1, то равны угловые коэффициенты наклона функций спроса и предложения, то есть функция предложения имеет вид $Q_S = b \cdot P$.

Формально: Подставив равновесные значения цены и объема в функцию предложения, получаем:

$$\frac{a}{2} = c \cdot \frac{a}{2 \cdot b} \Rightarrow c = b. \text{ То есть функция предложения имеет вид } Q_S = b \cdot P.$$

4. После введения дотации функция предложения модифицируется следующим образом:

$Q_S^1 = b \cdot (P + 4) = 4 \cdot b + b \cdot P$. Коэффициент эластичности предложения в новой равновесной точке уменьшается на $\frac{1}{4}$, то есть равен 0,75 (можно показать, что линейные функции предложения, пересекающие ось абсцисс при положительных значениях имеют во всех точках эластичность меньше единицы). Тогда: $E_S = \frac{\partial Q_S^1}{\partial P} \cdot \frac{P_1^e}{Q_1^e} = \frac{b \cdot P_1^e}{4 \cdot b + b \cdot P_1^e} = 0,75$. Решая полученное уравнение, получаем, что $P_1^e = 12$. В

точке равновесия ($P_1^e = 12$) выполняется условие $Q_D(12) = Q_S^1(12)$, то есть $a - 12 \cdot b = 4 \cdot b + 12 \cdot b$. Из этого следует, во первых, что $Q_1^e = 4 \cdot b + 12 \cdot b = 16 \cdot b$, а во-вторых, что $a = 28 \cdot b$.

Тогда функция спроса выглядит следующим образом: $Q_D = 28 \cdot b - b \cdot P$. Исходя из этого, исходный равновесный объем равен $Q_0^e = \frac{a}{2} = \frac{28 \cdot b}{2} = 14 \cdot b$. Следовательно, относительное увеличение равновесного

объема (или объема продаж) равно $\frac{Q_1^e}{Q_0^e} = \frac{16 \cdot b}{14 \cdot b} = \frac{8}{7}$. Таким образом, равновесный объем увеличился на $\frac{1}{7} \cdot 100\% \approx 14,29\%$.

Ответ: равновесный объем увеличился на $\frac{1}{7} \cdot 100\% \approx 14,29\%$.

Задача 3

Монополист разработал и успешно реализовал план продажи ограниченной партии нового товара. Сначала он провел масштабную рекламную кампанию, изучил спрос на товар и вывел функцию спроса, которая по его оценкам имела вид $Q = 220 - 2P$, где Q - количество товара, в условных единицах, а P - цена условной единицы товара, в денежных единицах. Он также убедился в том, что спрос на товар устойчив и не изменится в течение месяца.

Потом монополист объявил, что продавать товар он будет по фиксированной цене и только один месяц. Однако после того как в течение 15 дней все, кто готов был купить товар по названной цене, приобрели его, он объявил о новой сниженной цене и так распродал все остатки товара.

Определите, по каким ценам продавал и какую прибыль в итоге получил хитрый монополист, если известно, что его затраты на рекламу и производство продукта составили $TC = 80 + Q^2$ ден. ед.

Решение 1

Пусть X - количество товара, которое было распродано монополистом за первые 15 дней. Тогда начальная цена, которую установил монополист, определяется из функции спроса $P_X = 110 - 0,5X$. Выручка монополиста от продажи товара в первой половине месяца определяется функцией $TR_X = (110 - 0,5X)X = 110X - 0,5X^2$.

Во второй половине месяца спрос на товар предъявляли только те, кто его не купил, а значит, функция спроса приняла вид $Q = (220 - X) - 2P$.

Пусть Y - количество товара, которое было распродано монополистом за вторую половину месяца, когда он установил сниженную цену. Эта цена, определяется из функции спроса $P_Y = 110 - 0,5X - 0,5Y$. Выручка монополиста от продажи товара во второй половине месяца определяется функцией $TR_Y = (110 - 0,5X - 0,5Y)Y = 110Y - 0,5XY - 0,5Y^2$.

Общие затраты монополиста составили в принятых обозначениях $TC = 80 + (X + Y)^2 = 80 + X^2 + 2XY + Y^2$.

Запишем общую функцию прибыли монополиста:

$$\pi = TR_X + TR_Y - TC = 110X - 0,5X^2 + 110Y - 0,5XY - 0,5Y^2 - 80 - X^2 - 2XY - Y^2.$$

Теперь надо взять частные производные прибыли по X и Y и приравнять их нулю.

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = 110 - X - 0,5Y - 2X - 2Y = 110 - 3X - 2,5Y$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = 110 - 0,5X - Y - 2X - 2Y = 110 - 2,5X - 3Y$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 110 - 3X - 2,5Y = 0 \\ 110 - 2,5X - 3Y = 0 \end{cases}$$

Решив систему, находим, что $X = Y = 20$.

Теперь несложно определить, что первоначально монополист назначил цену: $P_X = 110 - 0,5 \cdot 20 = 100$ ден. ед., а потом установил цену $P_Y = 110 - 0,5 \cdot 20 - 0,5 \cdot 20 = 90$ ден. ед.

Прибыль монополиста оказалась равна

$$\pi = TR_X + TR_Y - TC = 100 \cdot 20 + 90 \cdot 20 - (80 + 40^2) = 3800 - 1680 = 2120 \text{ ден. ед.}$$

Ответ: первоначально монополист установил цену 100 ден.ед., а потом снизил ее до 90 ден. ед., прибыль монополиста составила 2120 ден.ед.

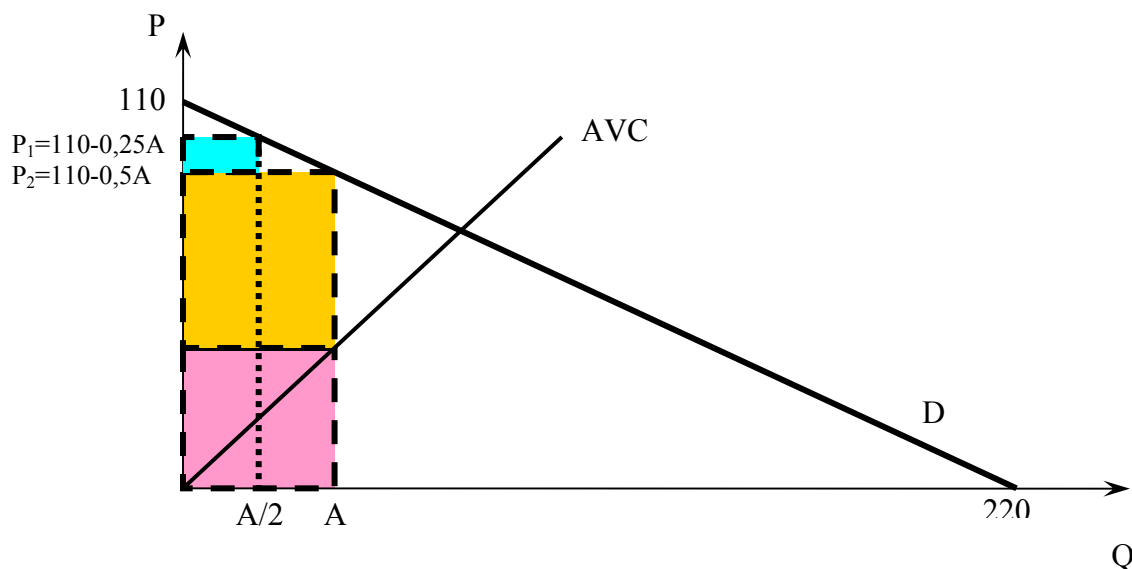
Решение 2

Задачу можно решить и без частных производных.

Пусть A – количество товара, которое произвел и продал монополист. Тогда вторая цена, по которой он распродал остатки продукции (назовем ее основной ценой), будет равна $P_2 = 110 - 0,5A$.

Часть продукции монополист распродал по повышенной цене, которая позволила ему получить дополнительный доход с тех, кто был готов платить более высокую цену. Превышение первой цены над основной будет находиться в диапазоне $(0, 0,5A)$, количество товара, которое можно продать с наценкой находится в диапазоне $(0, A)$, а так как функция спроса линейная, то максимальный доход получим, если с надбавкой $(\frac{0,5A}{2})$ продадим товар в количестве $(\frac{A}{2})$. Отсюда находим, что первоначальная цена

будет равна $P_1 = 110 - 0,5A + \frac{0,5A}{2} = 110 - 0,25A$.



Запишем функцию общей прибыли монополиста

$$\pi = (P_2 A + (P_1 - P_2) \frac{A}{2}) - TC$$

$$\pi = (110 - 0,5A)A + ((110 - 0,25A) - (110 - 0,5A)) \frac{A}{2} - 80 - A^2$$

$$\pi = 110A - 0,5A^2 - 0,25 \frac{A^2}{2} - 80 - A^2$$

Берем производную и приравняем ее к 0. Таким образом находим объем продаж продукции A , обеспечивающий монополисту максимум прибыли.

$$(\pi)' = 110 - A - 0,25A - 2A = 110 - 2,75A = 0 \Rightarrow A = \frac{110}{2,75} = 40$$

Это значит, что первоначальная цена, которую установит хитрый монополист будет равна

$$P_1 = 110 - \frac{0,5 \cdot 40}{2} = 100$$

$$P_2 = 110 - 0,5 \cdot 40 = 90$$

$$\pi = 100 \cdot \frac{40}{2} + 90 \cdot \frac{40}{2} - 80 - 40^2 = 3800 - 1680 = 2120$$

Ответ: первоначально монополист установил цену 100 ден.ед., а потом снизил ее до 90 ден. ед., прибыль монополиста составила 2120 ден.ед.

Задача 4

Кот Матроскин имеет участок земли недалеко от Простоквашино, который сдает в аренду псу Шарикку за a рублей в год (оплата производится всегда в конце года).

В начале этого года Шарик сделал Матроскину предложение: «Давай ты снизишь мне годовую арендную плату на 70%, а через два года я выкуплю у тебя землю за ту цену, которую ты назовешь (в пределах разумного, конечно)». Кот Матроскин подумал-подумал и согласился.

Определите, какую минимальную цену за участок может назвать расчетливый Матроскин, если в экономике все стабильно, инфляции нет, а ставка банковского процента давно уже не меняется и равна 20%.

Решение

Если бы кот Матроскин в начале текущего года был настроен продать участок, то он продал бы его не меньше, чем за Z рублей. Эту величину легко найти из соотношения: $a = Z \cdot 0,2$, т.е. $Z = 5a$. Дело в том, что цена земли эквивалентна той сумме денег, которую собственник земли мог бы положить в банк и получать ежегодный доход, как процент на капитал, равный той ренте (арендной плате), которую он сейчас получает, владея участком земли.

Теперь попробуем определить, в какую сумму можно оценить участок, который принесет его владельцу разовый доход: в конце первого года $0,3a$ и в конце второго года $(0,3a + X)$, где X - минимальная цена за землю, которую следует запросить ее владельцу в конце второго года.

Полученный доход в конце первого года можно представить как $K_1 \cdot 1,2 = 0,3a$, т.е. получение этого дохода эквивалентно владению суммой K_1 в начале первого года. Полученный доход в конце второго года можно представить как $K_2 \cdot 1,2^2 = 0,3a + X$, т.е. получение этого дохода эквивалентно владению суммой K_2 в начале первого года. Таким образом, в начале первого года получатель указанного дохода оценивает свой участок земли как сумму $(K_1 + K_2)$.

Ясно, что выгодно согласиться на предложение Шарика, если $(K_1 + K_2)$ окажется больше Z , или должно выполняться следующее неравенство: $\frac{0,3a}{1,2} + \frac{0,3a + X}{1,2^2} \geq 5a$.

Решив это неравенство, находим, что $X \geq 6,54a$

Примечание. Для тех, кто знаком с дисконтированием, можно дать такое пояснение: рассчитав величину $(K_1 + K_2)$ мы фактически определили текущую дисконтированную стоимость будущих доходов, которые получит владелец земли за два года с учетом того, что в конце второго года участок будет продан за X рублей.

Ответ: Минимальная цена, которая может быть названа Матроскиным, составляет $6,54a$ рублей.

Задача 5

Центральный банк страны собирается приступить к реализации мер стимулирующей монетарной политики. Для рассмотрения предлагаются следующие меры:

- а) изменить норму обязательных резервов на 3,5 процентных пункта;
- б) выкупить на открытом рынке государственные краткосрочные обязательства (ГКО) на сумму 140 млн. ден. ед.;
- в) предоставить кредиты коммерческим банкам.

Известно, что реализация любой из названных мер ПО ОТДЕЛЬНОСТИ может привести к изменению денежной массы максимально на 875 млн. ден. ед.

Определите:

- а) какую сумму денег Центральный банк готов выдать в кредит коммерческим банкам;
- б) как максимально может измениться денежная масса, если все предлагаемые меры будут реализованы ОДНОВРЕМЕННО. (Предполагается, что коммерческие банки используют свои кредитные возможности полностью, а масса наличных денег в стране не меняется.)

Решение

Норма обязательных резервов, установленная ЦБ, равна $\frac{140}{875} \cdot 100\% = 16\%$.

Стимулирующая монетарная политика предполагает, что должна увеличиться масса денег в экономике, а значит, норма обязательных резервов будет снижена.

Новая норма обязательных резервов равна $16\% - 3,5\% = 12,5\%$.

а) Центральный банк готов выдать в кредит коммерческим банкам: $875 \cdot 0,16 = 140$.

б) Максимально возможный прирост денежной массы в результате одновременной реализации всех трех мер Центрального банка равен: $875 + \frac{140}{0,125} + \frac{140}{0,125} = 875 + 1120 + 1120 = 3115$.

Ответ: а) Центральный банк готов выдать в кредит коммерческим банкам 140 млн. ден. ед.; б) Денежная масса максимально может увеличиться на 3115 млн. ден. ед.

Задача 6

На общем собрании членов садового товарищества "Унифик" рассматривался вопрос о необходимости освещения улиц товарищества в ночное время. Все члены товарищества поддержали предложение об установке фонарных столбов, но когда речь зашла об оплате, то оказалось, что только 16 человек готовы внести деньги на их установку.

В результате дополнительного опроса выяснилось, что у каждого из этих 16 членов товарищества функции спроса одинаковые и описываются уравнением $Q = 30 - \frac{P^{1,5}}{4} - \frac{3P}{4}$, где Q – количество столбов, которое член товарищества хотел бы видеть на улицах, штук, а P – взнос, который он при этом готов внести на установку одного столба, тыс. руб.

Аналогичный вопрос рассматривался и на общем собрании другого садового товарищества "Дуотип". Там оплачивать затраты на установку столбов согласились тоже только 16 человек, при этом оказалось, что функции спроса у них разные: каждый из 10 членов товарищества первого типа имеет функцию спроса $Q_1 = 10 - \frac{P^{1,5}}{16} - \frac{P}{8}$, а каждый из 6 членов второго типа – $Q_2 = 15 - 1,5P$.

Определите, сколько фонарных столбов будет установлено в каждом товариществе, если известно, что затраты на установку одного столба составляют 16 000 руб., а уличное освещение

Решение

Поскольку освещение – общественное благо, то сложение кривых спроса производится «по вертикали», т.е. вдоль оси P .

Проведем сначала расчет для товарищества "Унифик".

Индивидуальный спрос одного участника: $Q_1 = 30 - \frac{P^{1,5}}{4} - \frac{3P}{4}$

При сложении индивидуальных кривых спроса воспользуемся тем фактом, что все 16 участников предъявляют одинаковый спрос на благо, а, следовательно, готовность любого из них платить за любой объем предоставленного блага составляет 1/16 общей готовности.

Общий спрос всех 16-ти участников: $Q_{16} = 30 - \frac{\left(\frac{P}{16}\right)^{1,5}}{4} - \frac{3}{4} * \left(\frac{P}{16}\right)$

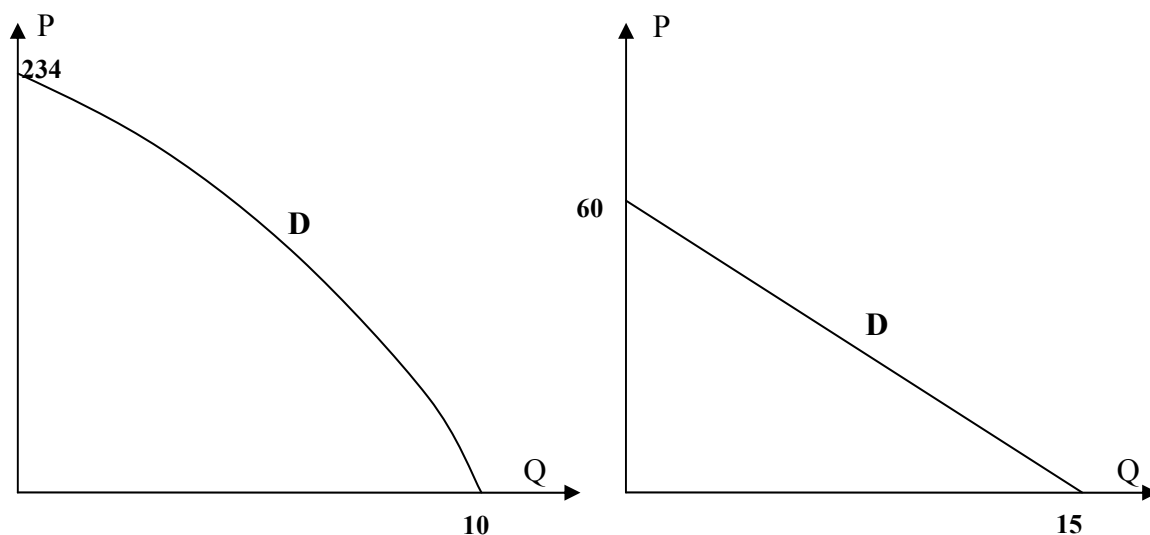
Объем общего спроса при $P=16$ составит: $Q_{16}(16) = 30 - \frac{\left(\frac{16}{16}\right)^{1,5}}{4} - \frac{3}{4} * \frac{16}{16} = 29$

Теперь разберем ситуацию в товариществе "Дуотип".

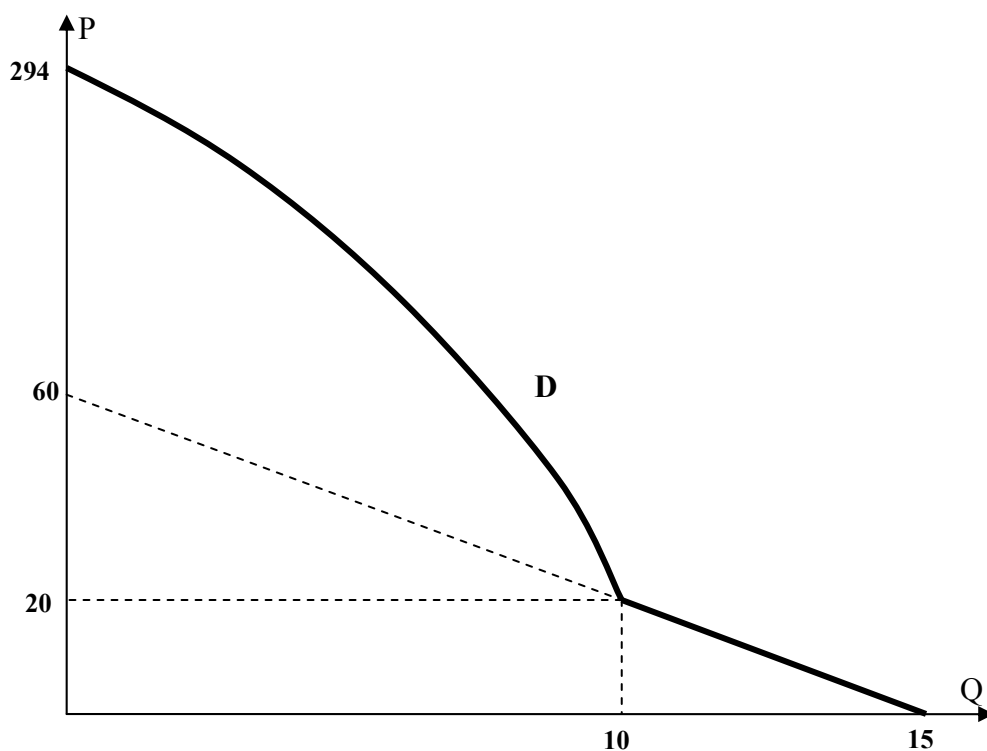
Общий спрос всех 10-ти «первых» участников: $Q_{10} = 10 - \frac{\left(\frac{P}{10}\right)^{1,5}}{16} - \frac{1}{8} * \frac{P}{10}$

Общий спрос всех 6-ти «вторых» участников: $Q_{26} = 15 - 1,5 \frac{P}{6} = 15 - \frac{P}{4}$

Сложить две полученные кривые групповых спросов алгебраически довольно сложно, но представим ситуацию схематично на графиках:



Получим суммарную кривую спроса товарищества «Дуотип» сложением кривых D1 и D2 по оси P:



Очевидно, что уровню цены $P=16$ соответствует элемент суммарной кривой, являющийся участком кривой D2. Соответственно:

$$Q_{2_6}(16) = 15 - 1,5 \frac{16}{6} = 15 - \frac{16}{4} = 11$$

Ответ: В садовом товариществе «Унифик» могут установить 29 столбов, а в товариществе «Унифик» 11 столбов.