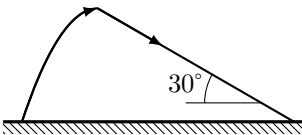
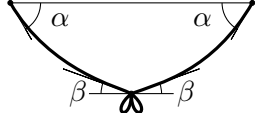
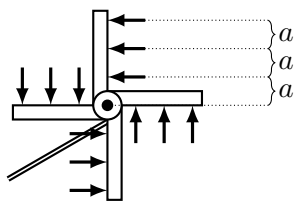
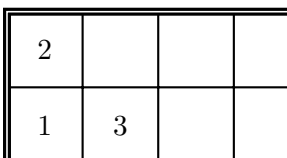
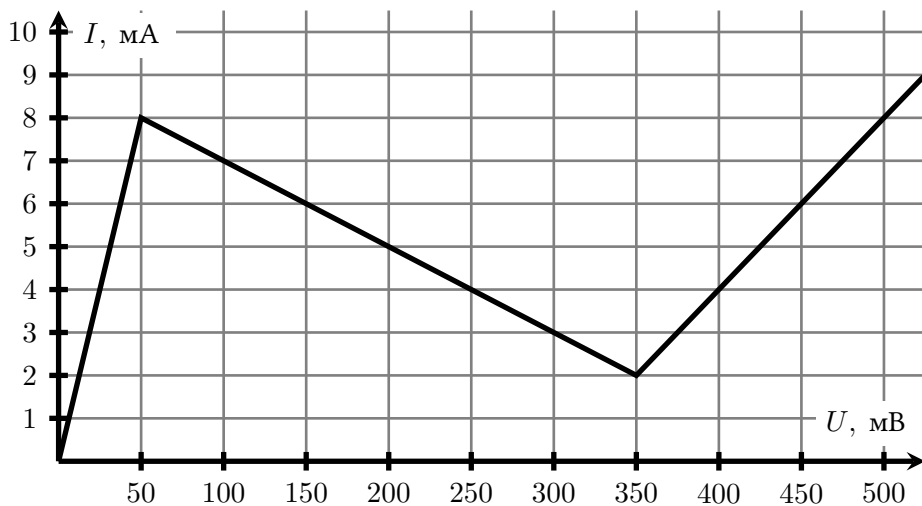


9 класс

1	<p>Кузнечик умеет прыгать с начальной скоростью 5 м/с в любом направлении. Находясь в воздухе, он может раскрыть крылья и моментально начать планировать под углом 30° к горизонту. Найдите максимальное расстояние, которое кузнечик может перелететь за один прыжок. Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.</p>	
2	<p>Гибкая тяжёлая однородная верёвка с узлом посередине подвешена за концы. На рисунке показаны углы, которая верёвка образует с горизонталью на концах и рядом с узлом. Найдите, долю узла от всей верёвки.</p>	
3	<p>На стройке нужно поднять кучу кирпичей на верхний этаж, совершив суммарную работу A. Кирпичи загружают порциями на платформу, которую поднимают тросом. Дюжина рабочих, изображённых на рисунке стрелками (вид сверху), вытягивают трос с помощью лебёдки с вертикальным барабаном. Двигаясь со скоростью $v \leq v_0$, рабочий может прикладывать силу не больше, чем $(1 - \frac{v}{v_0}) F_0$. Определите минимальное время выполнения этого задания. Потерями на трение, временем спуска платформы и её весом пренебречь. Размер порций можно менять, но даже максимальная порция, которую могут поднять рабочие, много меньше всей кучи.</p>	
4	<p>В архивах лорда Кельвина был найден план очень длинного дома, один край которого изображён на рисунке. Из пояснений к плану следовало, что если в комнате 1 растопить печь, а в комнате 2 приоткрыть окно, то в них установятся температуры 30°C и 10°C соответственно. Найдите установившуюся температуру в комнате 3. Комнаты одинаковы. Теплообменом через внешние стены пренебречь. Считайте, что мощность теплообмена между соседними комнатами пропорциональна разности температур в них.</p>	
5	<p>На рисунке ниже показана вольт-амперная характеристика туннельного диода. Постройте график вольт-амперной характеристики для схемы из туннельного диода и резистора сопротивлением 100 Ом, соединённых последовательно. Рассмотрите два режима измерения:</p> <ol style="list-style-type: none"> напряжение медленно увеличивают от 0 В до 1 В; напряжение медленно уменьшают от 1 В до 0 В. 	



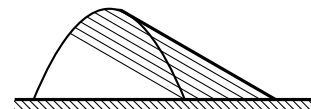
Возможные решения задач

9 класс

Задача 1. Совсем как огуречик

В задаче два параметра, изменяя которые нужно максимизировать дальность полёта: угол прыжка и момент раскрытия крыльев.

Для начала поймём, в какой точке параболы кузнечик выгоднее всего начинать планировать. Из рисунка справа ясно, что наибольшее расстояние кузнечик пролетит, если планировать будет по касательной к параболе. Иными словами, если он раскроет крылья в тот момент, когда будет лететь вниз под углом 30° к горизонту. Это условие фиксирует время полёта по параболе. Обозначим (пока неизвестный) угол прыжка α , скорость прыжка v , а время до раскрытия крыльев t , тогда



$$\frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \frac{v \sin \alpha - gt}{v \cos \alpha} = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

Выражаем время,

$$t = \frac{v}{g} \left(\sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha \right) = \frac{2\sqrt{3}v}{3g} \sin(\alpha + 30^\circ). \quad (2)$$

Полная дальность полёта складывается из расстояния, которое кузнечик пролетел по параболе,

$$\ell_1 = vt \cos \alpha = \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g} \sin(\alpha + 30^\circ) \cos \alpha, \quad (3)$$

и расстояния, которое он планировал под углом 30° с высоты $y(t)$,

$$\ell_2 = y(t) \operatorname{ctg} 30^\circ = \left(vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \right) \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g} \left(\sqrt{3} \sin \alpha - \sin(\alpha + 30^\circ) \right) \sin(\alpha + 30^\circ). \quad (4)$$

Итого

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_1 + \ell_2 = \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g} \left(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha - \sin(\alpha + 30^\circ) \right) \sin(\alpha + 30^\circ) \\ &= \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g} \left(2 \sin(\alpha + 30^\circ) - \sin(\alpha + 30^\circ) \right) \sin(\alpha + 30^\circ) \\ &= \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g} \sin^2(\alpha + 30^\circ). \end{aligned} \quad (5)$$

Наибольшее значение ℓ достигается при $\alpha = 60^\circ$ и равно

$$\ell_{\max} = \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g} = \frac{2\sqrt{3} \cdot (5 \text{ м/с})^2}{3 \cdot 10 \text{ м/с}^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ м} \approx 2,89 \text{ м}. \quad (6)$$

Ответ: Наибольшее расстояние полёта равно $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ м.

№	Критерий	Баллы
1	Установлено, что планировать выгоднее всего по касательной к параболе.	3
2	Время полёта по параболе связано с углом прыжка.	2
3	Записано полное расстояние полёта.	3
4	Получен ответ.	2
Сумма		10

Примечание: есть и другие решения, довольно различные: использующее параболу безопасности; с поворотом системы координат; через производные по времени и углу. *Sapienti sat.*

Задача 2. Узелок на память

Обозначим массу всей верёвки M , а массу узла m . Введём силы натяжения верёвки в точках крепления и рядом с узлом. На рисунке \vec{T}_1 действует на конец верёвки, а \vec{T}_2 — на узел. Запишем второй закон Ньютона для всей верёвки в проекции на вертикальную ось:

$$Mg = 2T_1 \sin \alpha. \quad (7)$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось для узла:

$$mg = 2T_2 \sin \beta. \quad (8)$$

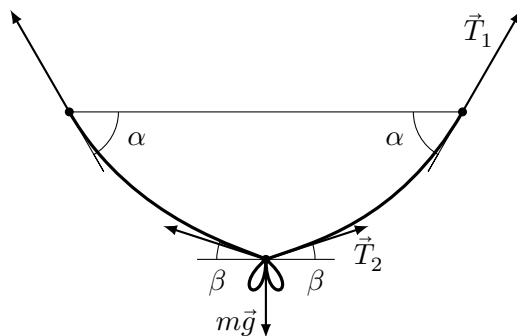
Наконец, запишем второй закон Ньютона для части верёвки от узла до правой точки крепления в проекции на горизонтальную ось:

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta. \quad (9)$$

Подставляя в последнее выражение силы натяжения из (7) и (8), получаем

$$M \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = m \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (10)$$

Ответ: Узел составляет от всей верёвки долю $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.



№	Критерий	Баллы
1	Записаны три независимых и не следующих из симметрии равенства проекций сил натяжения для разных участков верёвки.	3 + 3 + 3
2	Получен ответ.	1
Сумма		10

Задача 3. Кабестан

Чтобы выполнить фиксированную работу за наименьшее время, установка должна развить максимальную мощность, которая равна сумме мощностей рабочих. Ясно, что как бы ни была нагружена платформа, рабочие должны поднимать её с максимальной скоростью, с которой могут. Изменяя вес порции кирпичей, мы одновременно меняем и эту скорость подъёма. Поймём, как мощность установки связана со скоростью её вращения.

Пусть ближний к центру рабочий движется по окружности радиуса a со скоростью v . Тогда средний и дальний от центра рабочие движутся со скоростями $2v$ и $3v$ соответственно, т.к. движутся по окружностям радиусов $2a$ и $3a$. Максимальные мощности, которые они могут развить при таких скоростях, равны произведениям скоростей на прикладываемые силы:

$$vF_0 \left(1 - \frac{v}{v_0}\right), \quad 2vF_0 \left(1 - \frac{2v}{v_0}\right) \quad \text{и} \quad 3vF_0 \left(1 - \frac{3v}{v_0}\right). \quad (11)$$

Полная мощность четырёх троек рабочих равна

$$\begin{aligned} P &= 4 \left(vF_0 \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) + 2vF_0 \left(1 - \frac{2v}{v_0}\right) + 3vF_0 \left(1 - \frac{3v}{v_0}\right) \right) \\ &= 4v_0F_0\alpha \left((1 - \alpha) + 2(1 - 2\alpha) + 3(1 - 3\alpha) \right) \\ &= 4v_0F_0\alpha(6 - 14\alpha), \end{aligned} \quad (12)$$

где мы обозначили $\alpha = v/v_0$. Квадратичное выражение $\alpha(6 - 14\alpha)$ принимает наибольшее значение посередине между корнями, т.е. при $\alpha = 3/14$. Само же максимальное значение равно $9/14$.

Таким образом, максимальная мощность установки равна

$$P_{\max} = \frac{4 \cdot 9}{14} v_0 F_0 = \frac{18}{7} v_0 F_0, \quad (13)$$

а минимальное время выполнения работы A равно

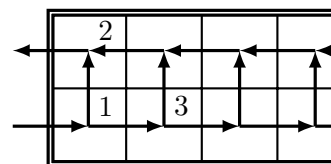
$$t_{\min} = \frac{A}{\frac{18}{7} v_0 F_0} = \frac{7A}{18v_0 F_0}. \quad (14)$$

Ответ: Минимальное время выполнения задания равно $\frac{7A}{18v_0 F_0}$.

№	Критерий	Баллы
1	Использовано, что скорости рабочих относятся как 1: 2: 3.	2
2	Записаны мощности рабочих.	3
3	Записана полная мощность установки.	2
4	Получен ответ.	3
Сумма		10

Задача 4. Отопление отеля Гильберта

Нарисуем стрелками, как передаётся тепло в этом длинном доме. В комнату 1 тепло поступает из печки, т.е. «извне», а не из соседних комнат. Аналогично, из комнаты 2 оно уходит наружу. Между остальными комнатами теплообмен устроен, как показано на рисунке справа, причём сумма втекающего тепла равна сумме вытекающего. Тепловая энергия сохраняется.



Мощность теплопередачи пропорциональна разности температур, т.е. мощность теплового потока между из комнаты i в комнату j можно записать как

$$P = \alpha(T_j - T_i), \quad (15)$$

где коэффициент α одинаков для всех внутренних стен.

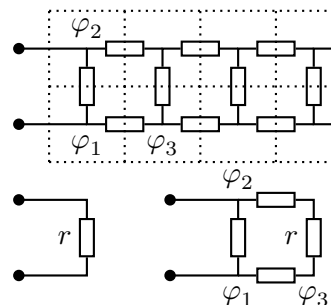
Линейность закона (15) и закон сохранения тепла наталкивают нас на аналогию с электрическим током.

Краткий тепло-электрический словарь:

комната	узел	T	φ , потенциал
стена	резистор	α	$1/R$, проводимость
P	I , сила тока	Q	все остальные слова

Тогда на языке электрических схем нам нужно найти потенциал φ_3 в полубесконечной цепи из одинаковых сопротивлений R . Это можно сделать заменой цепи на эквивалентное сопротивление r и выделением такой же цепи внутри исходной. Ввиду бесконечности схемы, сопротивления всех трёх схем на рисунке равны. В частности,

$$r = \frac{R(2R + r)}{R + 2R + r} \Rightarrow r = (\sqrt{3} - 1)R. \quad (16)$$



Из равенства токов имеем

$$\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R + r} \Rightarrow \varphi_3 - \varphi_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\sqrt{3}\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{3} + 1}. \quad (17)$$

Переводя обратно на язык тепла, получаем

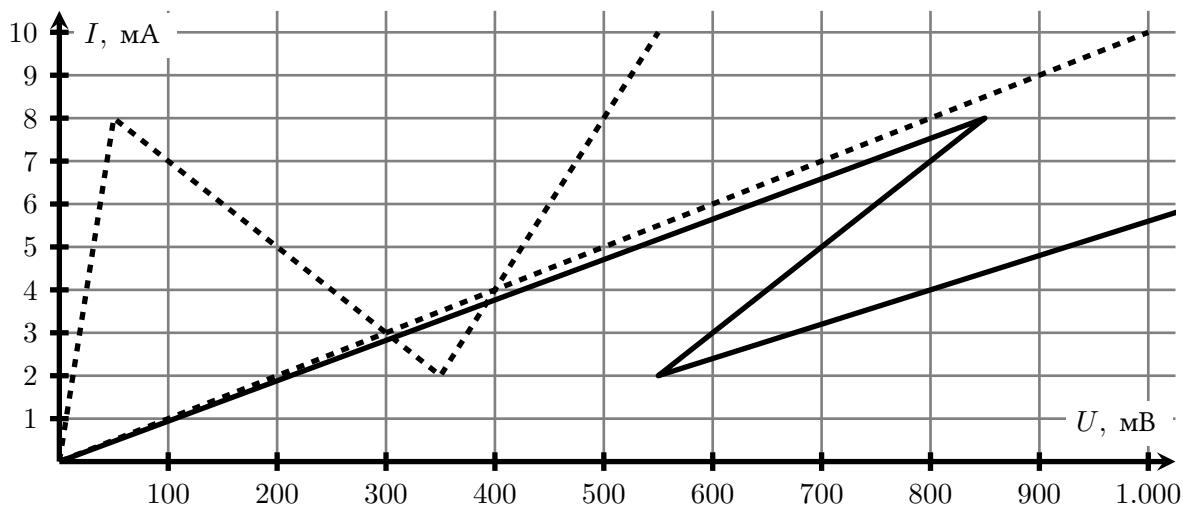
$$T_3 = \frac{\sqrt{3}T_1 + T_2}{\sqrt{3} + 1} \approx 22,7^\circ\text{C}. \quad (18)$$

Ответ: В комнате 3 установится температура $22,7^\circ\text{C}$.

№	Критерий	Баллы
1	Установлена аналогия с бесконечной цепью или предложена идея использовать те же методы.	4
2	Бесконечная цепь решена.	4
3	Получен ответ.	2
Сумма		10

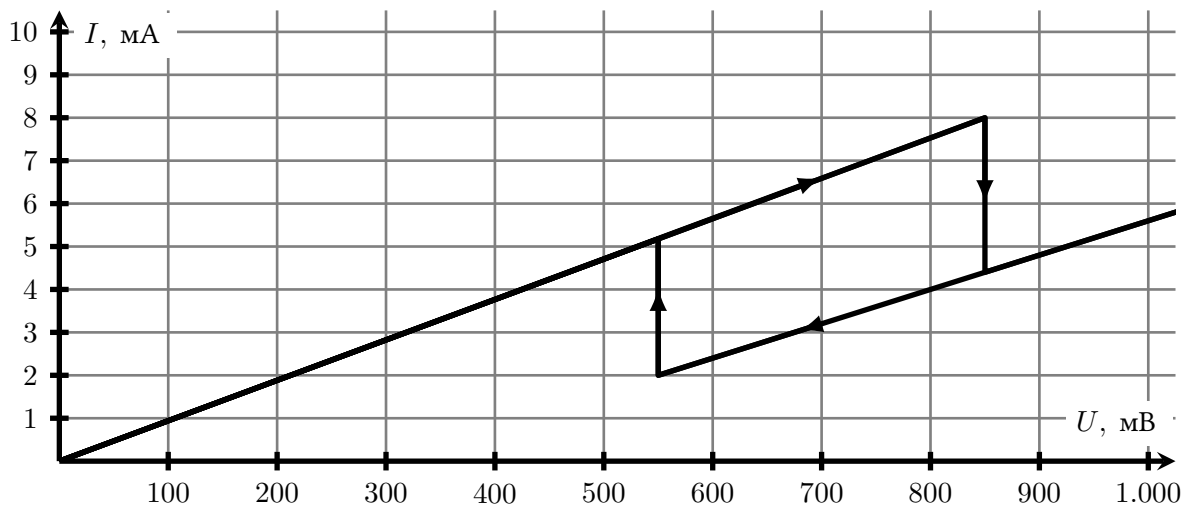
Задача 5. Гистерезис

При последовательном соединении токи через элементы равны, а напряжения складываются. Сложим графики вольт-амперных характеристик туннельного диода и резистора (пунктирными линиями) и посмотрим, что получится:



В результате сложения графиков по горизонтали ВАХ перестала быть функцией (однозначным отображением). Иными словами, для напряжений в диапазоне [550 мВ; 850 мВ] якобы возможны три значения тока.

При медленном увеличении напряжения от 0 мВ до 850 мВ сила тока будет даваться верхней ветвью графика, ничто не побудит систему «перескочить» на среднюю или нижнюю ветвь. Однако при дальнейшем увеличении напряжения единственным значением тока окажется значение с нижней ветви. Аналогично, при уменьшении напряжения от 1000 мВ до 550 мВ сила тока будет даваться нижней ветвью графика, затем система перейдет на верхнюю. Итоговый график ВАХ:



№	Критерий	Баллы
1	Получен неоднозначный график ВАХ.	4
2	Указано, как сила тока будет меняться при повышении и понижении напряжения.	2 + 2
3	Построен итоговый график ВАХ.	2
Сумма		10