Возможные решения задач

9 класс

1-й вариант

Задача 1. Тише едешь — дальше будешь

Сразу отметим, что 90 км/ч $= 25$ м/с.

Лихач движется с максимальной разрешённой скоростью до тех пор, пока не приходится начинать тормозить с максимальным ускорением, чтобы не проехать на красный. Понять, что такое торможение приведёт к полной остановке лихача на светофоре, можно, например, так: торможение от максимальной скорости до нуля занимает

$$t_1 = \frac{25\ \text{м/с}}{5\ \text{м/с}^2} = 5\ \text{с}, \tag{1}$$

а путь, пройденный при таком торможении, равен

$$\ell_1 = \frac{25\ \text{м/с}}{2} \cdot 5\ \text{с} = 62{,}5\ \text{м}. \tag{2}$$

Оставшееся расстояние $\ell_2 = 150\ \text{м} - \ell_1 = 87{,}5\ \text{м}$ он пройдёт за

$$t_2 = \frac{87{,}5\ \text{м}}{25\ \text{м/с}} = 3{,}5\ \text{с}. \tag{3}$$

Поскольку $t_1 + t_2 = 8{,}5\ \text{с} < 10\ \text{с}$, лихачу придётся стоять на светофоре.

Осторожный водитель двигается с таким ускорением a, что проезжает светофор ровно в момент переключения сигнала со скоростью v_1. Таким образом,

$$150\ \text{м} = \frac{25\ \text{м/с} + v_1}{2} \cdot 10\ \text{с}, \tag{4}$$

откуда $v_1 = 5$ м/с.

Получаем, что когда сигнал светофора сменится на зелёный, лихачу потребуется ещё $t_1 = 5$ с и $\ell_3 = \ell_1 = 62{,}5$ м, чтобы разогнаться до максимальной скорости, а осторожный водитель за это время разгонится до максимальной скорости за

$$t_3 = \frac{25\ \text{м/с} - 5\ \text{м/с}}{5\ \text{м/с}^2} = 4\ \text{с}, \tag{5}$$

и ещё 1 с будет ехать с максимальной скоростью. Таким образом, он проедет

$$\ell_4 = \frac{25\ \text{м/с} + 5\ \text{м/с}}{2} \cdot 4\ \text{с} + 25\ \text{м/с} \cdot 1\ \text{с} = 85\ \text{м} \tag{6}$$

и окажется на $\ell_4 - \ell_3 = 22{,}5$ м впереди лихача.

Ответ: Осторожный водитель окажется впереди на $22{,}5$ м.

№	Критерий	Баллы
1	Установлено, как двигался лихач.	2
2	Получено, что лихач полностью остановится у светофора.	3
3	Установлено, как двигался осторожный водитель.	1
4	Найдена скорость осторожного водителя у светофора.	1
5	Получен ответ.	3
Сумма		10

Задача 2. Квадрат через квадрат

При любом подключении омметра к квадрату, сопротивление можно найти как

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1(R_0 - R_1)}{R_0}, \tag{7}$$

где $R_0 = 4$ кОм, а R_1 и R_2 — сопротивления параллельных участков квадрата между клеммами.

Рассмотрим R как функцию от R_1. Максимальное значение этой функции достигается в точке $R_0/2$ и оно равно

$$R_{\text{max}} = \frac{\frac{R_0}{2}\left(R_0 - \frac{R_0}{2}\right)}{R_0} = \frac{1}{4}R_0 = 1 \text{ кОм}. \tag{8}$$

Это значение достигается при подключении клемм к серединам противоположных сторон квадрата.

Минимальное значение этой функции достигается при минимальном (и максимальном) R_1. Так как расстояние между клеммами равно стороне квадрата, R_1 не может быть меньше сопротивления одной стороны, то есть $R_0/4 = 1$ кОм. Минимальное значение R тогда равно

$$R_{\text{max}} = \frac{\frac{R_0}{4}\left(R_0 - \frac{R_0}{4}\right)}{R_0} = \frac{3}{16}R_0 = 0{,}75 \text{ кОм}. \tag{9}$$

Это значение достигается при подключении клемм к соседним вершинам квадрата.

Очевидно, что все промежуточные значения тоже достигаются.

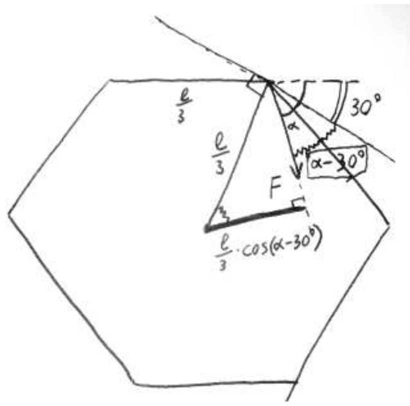
Ответ: Показания омметра лежат в промежутке от $0{,}75$ кОм до 1 кОм.

№	Критерий	Баллы
1	Получена формула для сопротивления квадрата в случае произвольного подключения (формула 7 или подобная).	2
2	Найдено максимальное показание омметра.	4
3	Найдено минимальное показание омметра.	4
Сумма		10

Задача 3. Распил

Для определённости будем считать, что кран открывается по часовой стрелке. Чтобы вращать вентиль с наименьшей силой, нужно прикладывать эту силу с наибольшим плечом. Для этого точка приложения должна находиться на краю стороны вентиля, а направление приложения силы зависит от значения μ.

Максимальное возможное плечо равно расстоянию от угла вентиля до центра оси вращения. Оно достигается, когда угол между направлением силы и радиусом в точку приложения прямой, то есть когда угол α между стороной и направлением силы равен 60° для треугольного вентиля и 30° для шестиугольного. Однако, такие углы достижимы, только если $\mu \geq \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\mu \geq \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}$ соответственно.

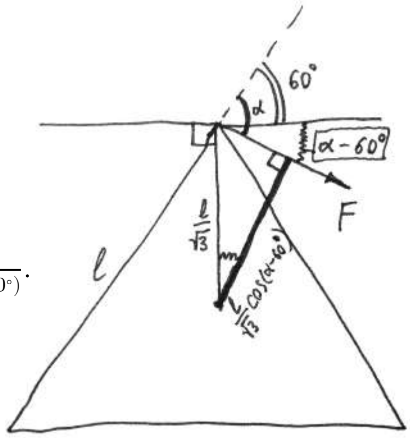


1. $\mu \geq \sqrt{3}$: Обозначим сторону исходного вентиля ℓ, тогда плечо равно $\ell/\sqrt{3}$.

   После спиливания сторона станет $\ell/3$, а плечо — тоже $\ell/3$.

   По правилу рычага
   $$F_1 \frac{\ell}{\sqrt{3}} = F_2 \frac{\ell}{3}, \tag{10}$$
   откуда $F_2/F_1 = \sqrt{3}$.

2. $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \mu < \sqrt{3}$: Плечо для треугольного вентиля не изменяется, а угол между стороной шестиугольного и направлением силы нужно взять наименьшим возможным, то есть $\operatorname{ctg}\alpha = \mu$. Получаем (см. рисунок), что плечо равно $\frac{\ell}{3}\cos(\alpha - 30^\circ)$, откуда $F_2/F_1 = \frac{\sqrt{3}}{\cos(\alpha - 30^\circ)}$.



3. $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$: Теперь оба угла с поверхностью нужно взять минимально возможными. Второе плечо такое же, что и в предыдущем случае, а первое плечо находим по аналогии. Оно равно (см. рисунок) $\frac{\ell}{\sqrt{3}}\cos(\alpha - 60^\circ)$. Получаем, что $F_2/F_1 = \frac{\sqrt{3}\cos(\alpha - 60^\circ)}{\cos(\alpha - 30^\circ)}$.

<u>**Ответ:**</u> При $\mu \geq \sqrt{3}$: $\frac{F_2}{F_1} = \sqrt{3}$, при $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \mu < \sqrt{3}$: $\frac{F_2}{F_1} = \frac{\sqrt{3}}{\cos(\alpha - 30^\circ)}$, а при $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\frac{F_2}{F_1} = \frac{\sqrt{3}\cos(\alpha - 60^\circ)}{\cos(\alpha - 30^\circ)}$.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, в какой точке должна быть приложена минимальная сила.	2
2	Получено направление приложения минимальной силы в зависимости от коэффициента трения (3 случая).	3
	• Если хотя бы для одного случая.	2
3	Найдено отношение плеч в каждом из случаев.	3
	• Если хотя бы для одного случая.	2
4	Получен ответ.	2
	• Если хотя бы для одного случая.	1
Сумма		10

Замечание для проверяющих: в этом варианте задача намного сложнее, чем в другом. В связи с этим жюри просит засчитывать рассуждения, верные хотя бы для одного значения μ, как разобранный случай, даже если границы для μ не указаны.

Задача 4. Остался в подвешенном состоянии

Пусть жёсткость всего жгута k, масса циркача m, ускорение свободного падения g. Тогда запишем равенство сил для исходного положения

$$mg = k\left(H + \frac{4}{5}H\right) = \frac{9}{5}kH. \tag{11}$$

Когда циркач поднялся и держится за жгут, сверху и снизу от него находятся отрезки жгута с разными коэффициентами жёсткости. Обозначим жёсткость верхнего k_1, а нижнего k_2. Как известно, они связаны с жёсткостью всего жгута соотношением

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}. \tag{12}$$

Тогда запишем равенство сил для второго положения циркача

$$mg = 2k_1 \cdot 2\left(H - \frac{2}{3}H\right) - k_2 \cdot \frac{2}{3}H. \tag{13}$$

Пусть после разрезания нижнего жгута циркач завис на высоте h. Запишем равенство сил для этого положения

$$mg = 2k_1 \cdot 2(H - h). \tag{14}$$

Подставим уравнение 11 в уравнения 13 и 14, а также введём удобные переменные $\alpha = \frac{k_1}{k}$ и $\beta = \frac{k_2}{k}$. Получим систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \\ \frac{4}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta = \frac{9}{5}, \\ 4\alpha\left(1 - \frac{h}{H}\right) = \frac{9}{5}. \end{cases} \tag{15}$$

Решив её, получаем $\frac{h}{H} = \frac{4}{5}$.

<u>Ответ:</u> Циркач повиснет на высоте $\frac{4}{5}H$.

№	Критерий	Баллы
1	Записано равенство сил для первого положения.	1
2	Записано равенство сил для второго положения.	4
	• В предположении, что $k_1 = k_2 = k$.	2
3	Записано равенство сил для третьего положения.	3
	• В предположении, что $k_1 = k_2 = k$.	1
4	Получен ответ.	2
	• В предположении, что $k_1 = k_2 = k$.	1
Сумма		10

Задача 5. Чайник плохо справился с задачей

Введём обозначения: время между переключениями t, мощность чайника P_1, мощность теплопотерь P_2, изначальная масса воды в чайнике m, удельная теплоёмкость воды c, удельная теплота парообразования L.

Рассмотрим первый цикл, то есть промежуток между первым и вторым выключением. Сначала вода остывает от температуры кипения на

$$\Delta T_1 = \frac{P_2 t}{mc}, \tag{16}$$

затем нагревается обратно до температуры кипения за время

$$t_1 = \frac{mc\Delta T_1}{P_1 - P_2} = \frac{P_2}{P_1 - P_2} t, \tag{17}$$

которое меньше t, как следует из графика. Затем вода кипит время

$$t_2 = t - t_1 = \frac{P_1 - 2P_2}{P_1 - P_2} t, \tag{18}$$

в результате чего её масса уменьшается на

$$\Delta m = \frac{(P_1 - P_2)t_2}{L} = \frac{(P_1 - 2P_2)t}{L}. \tag{19}$$

Заметим, что в последующих циклах изменятся будет только масса воды, причём каждый раз на фиксированную величину Δm. Поскольку воды становится меньше, остывать она будет успевать на большую величину. В частности, на втором цикле

$$\Delta T_2 = \frac{P_2 t}{(m - \Delta m)c} = \frac{m}{m - \Delta m} \Delta T_1. \tag{20}$$

Отношение $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}$ можно найти по клеткам на графике. Оно равно $\frac{19}{18}$. Таким образом,

$$\frac{m}{m - \Delta m} = \frac{19}{18} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{19}. \tag{21}$$

Получили, что за один цикл испаряется $\frac{1}{19}$ часть исходной массы воды в чайнике. Значит, после пяти отключений, то есть за четыре полных цикла, испарится $\frac{4}{19}$ часть. Таким образом, объём воды в чайнике уменьшится в

$$\frac{1}{1 - \frac{4}{19}} = \frac{19}{15} \tag{22}$$

раза.

Ответ: После пяти отключений объём воды в чайнике уменьшится в $\frac{19}{15}$ раза.

№	Критерий	Баллы
1	Получено, что Δm не зависит от номера цикла.	4
2	Отношение масс в первом и втором цикле связано с графиком (как в авторском решении или через коэффициенты наклона участков графика.)	4
3	Получен ответ.	2
Сумма		10

Возможные решения задач

9 класс

2-й вариант

Задача 1. Тише едешь — дальше будешь

Сразу отметим, что 90 км/ч $= 25$ м/с.

Лихач движется с максимальной разрешённой скоростью до тех пор, пока не приходится начинать тормозить с максимальным ускорением, чтобы не проехать на красный. Понять, что такое торможение приведёт к полной остановке лихача на светофоре, можно, например, так: торможение от максимальной скорости до нуля занимает

$$t_1 = \frac{25 \text{ м/с}}{5 \text{ м/с}^2} = 5 \text{ с}, \tag{23}$$

а путь, пройденный при таком торможении, равен

$$\ell_1 = \frac{25 \text{ м/с}}{2} \cdot 5 \text{ с} = 62{,}5 \text{ м}. \tag{24}$$

Оставшееся расстояние $\ell_2 = 300 \text{ м} - \ell_1 = 237{,}5$ м он пройдёт за

$$t_2 = \frac{237{,}5 \text{ м}}{25 \text{ м/с}} = 9{,}5 \text{ с}. \tag{25}$$

Поскольку $t_1 + t_2 = 14{,}5 \text{ с} < 20$ с, лихачу придётся стоять на светофоре.

Осторожный водитель двигается с таким ускорением a, что проезжает светофор ровно в момент переключения сигнала со скоростью v_1. Таким образом,

$$300 \text{ м} = \frac{25 \text{ м/с} + v_1}{2} \cdot 20 \text{ с}, \tag{26}$$

откуда $v_1 = 5$ м/с.

Получаем, что когда сигнал светофора сменится на зелёный, лихачу потребуется ещё $t_1 = 5$ с и $\ell_3 = \ell_1 = 62{,}5$ м, чтобы разогнаться до максимальной скорости, а осторожный водитель за это время разгонится до максимальной скорости за

$$t_3 = \frac{25 \text{ м/с} - 5 \text{ м/с}}{5 \text{ м/с}^2} = 4 \text{ с}, \tag{27}$$

и ещё 1 с будет ехать с максимальной скоростью. Таким образом, он проедет

$$\ell_4 = \frac{25 \text{ м/с} + 5 \text{ м/с}}{2} \cdot 4 \text{ с} + 25 \text{ м/с} \cdot 1 \text{ с} = 85 \text{ м} \tag{28}$$

и окажется на $\ell_4 - \ell_3 = 22{,}5$ м впереди лихача.

Ответ: Осторожный водитель окажется впереди на $22{,}5$ м.

№	Критерий	Баллы
1	Установлено, как двигался лихач.	2
2	Получено, что лихач полностью остановится у светофора.	3
3	Установлено, как двигался осторожный водитель.	1
4	Найдена скорость осторожного водителя у светофора.	1
5	Получен ответ.	3
Сумма		10

Задача 2. Квадрат через квадрат

При любом подключении омметра к квадрату, сопротивление можно найти как

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1(R_0 - R_1)}{R_0}, \tag{29}$$

где $R_0 = 4$ кОм, а R_1 и R_2 — сопротивления параллельных участков квадрата между клеммами.

Рассмотрим R как функцию от R_1. Максимальное значение этой функции достигается в точке $R_0/2$ и оно равно

$$R_{\max} = \frac{\frac{R_0}{2}\left(R_0 - \frac{R_0}{2}\right)}{R_0} = \frac{1}{4}R_0 = 1 \text{ кОм}. \tag{30}$$

Это значение достигается при подключении клемм к серединам противоположных сторон квадрата.

Минимальное значение этой функции достигается при минимальном (и максимальном) R_1. Так как расстояние между клеммами равно стороне квадрата, R_1 не может быть меньше сопротивления одной стороны, то есть $R_0/4 = 1$ кОм. Минимальное значение R тогда равно

$$R_{\max} = \frac{\frac{R_0}{4}\left(R_0 - \frac{R_0}{4}\right)}{R_0} = \frac{3}{16}R_0 = 0{,}75 \text{ кОм}. \tag{31}$$

Это значение достигается при подключении клемм к соседним вершинам квадрата.

Очевидно, что все промежуточные значения тоже достигаются.

Ответ: Показания омметра лежат в промежутке от $0{,}75$ кОм до 1 кОм.

№	Критерий	Баллы
1	Получена формула для сопротивления квадрата в случае произвольного подключения (формула 29 или подобная).	2
2	Найдено максимальное показание омметра.	4
3	Найдено минимальное показание омметра.	4
Сумма		10

Задача 3. Распил

Для определённости будем считать, что кран открывается по часовой стрелке. Чтобы вращать вентиль с наименьшей силой, нужно прикладывать эту силу с наибольшим плечом. Для этого точка приложения должна находиться на краю стороны вентиля, а направление приложения силы зависит от значения μ.

Однако, можно заметить, что после спиливания углов вентиль стал уменьшенной в $\sqrt{2}$ раз копией исходного. Тогда плечо приложения силы тоже стало в $\sqrt{2}$ раз меньше исходного. По правилу рычага можем записать

$$F_1 L = F_2 \frac{L}{\sqrt{2}}, \tag{32}$$

где L — длина исходного плеча, откуда $F_2/F_1 = \sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{F_2}{F_1} = \sqrt{2}$.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, в какой точке должна быть приложена минимальная сила.	2
2	Указано, что направление приложения минимальной силы определяется коэффициентом трения.	2
3	Найдено отношение плеч в первом и втором случаях (через подобие или геометрически).	4
4	Получен ответ.	2
Сумма		10

Задача 4. Остался в подвешенном состоянии

Пусть жёсткость всего жгута k, масса циркача m, ускорение свободного падения g. Тогда запишем равенство сил для исходного положения

$$mg = k\left(H + \frac{5}{6}H\right) = \frac{11}{6}kH. \tag{33}$$

Когда циркач поднялся и держится за жгут, сверху и снизу от него находятся отрезки жгута с разными коэффициентами жёсткости. Обозначим жёсткость верхнего k_1, а нижнего k_2. Как известно, они связаны с жёсткостью всего жгута соотношением

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}. \tag{34}$$

Тогда запишем равенство сил для второго положения циркача

$$mg = 2k_1 \cdot 2\left(H - \frac{3}{8}H\right) - k_2 \cdot \frac{3}{8}H. \tag{35}$$

Пусть после разрезания нижнего жгута циркач завис на высоте h. Запишем равенство сил для этого положения

$$mg = 2k_1 \cdot 2(H - h). \tag{36}$$

Подставим уравнение 33 в уравнения 35 и 36, а также введём удобные переменные $\alpha = \frac{k_1}{k}$ и $\beta = \frac{k_2}{k}$. Получим систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \\ \frac{5}{2}\alpha - \frac{3}{8}\beta = \frac{11}{6}, \\ 4\alpha\left(1 - \frac{h}{H}\right) = \frac{11}{6}. \end{cases} \tag{37}$$

Решив её, получаем $\frac{h}{H} = \frac{21}{32}$.

<u>Ответ:</u> Циркач повиснет на высоте $\frac{21}{32}H$.

№	Критерий	Баллы
1	Записано равенство сил для первого положения.	1
2	Записано равенство сил для второго положения. • В предположении, что $k_1 = k_2 = k$.	4 2
3	Записано равенство сил для третьего положения. • В предположении, что $k_1 = k_2 = k$.	3 1
4	Получен ответ. • В предположении, что $k_1 = k_2 = k$.	2 1
Сумма		10

Задача 5. Чайник плохо справился с задачей

Введём обозначения: время между переключениями t, мощность чайника P_1, мощность теплопотерь P_2, изначальная масса воды в чайнике m, удельная теплоёмкость воды c, удельная теплота парообразования L.

Рассмотрим первый цикл, то есть промежуток между первым и вторым выключением. Сначала вода остывает от температуры кипения на

$$\Delta T_1 = \frac{P_2 t}{mc}, \tag{38}$$

затем нагревается обратно до температуры кипения за время

$$t_1 = \frac{mc\Delta T_1}{P_1 - P_2} = \frac{P_2}{P_1 - P_2} t, \tag{39}$$

которое меньше t, как следует из графика. Затем вода кипит время

$$t_2 = t - t_1 = \frac{P_1 - 2P_2}{P_1 - P_2} t, \tag{40}$$

в результате чего её масса уменьшается на

$$\Delta m = \frac{(P_1 - P_2)t_2}{L} = \frac{(P_1 - 2P_2)t}{L}. \tag{41}$$

Заметим, что в последующих циклах изменятся будет только масса воды, причём каждый раз на фиксированную величину Δm. Поскольку воды становится меньше, остывать она будет успевать на большую величину. В частности, на втором цикле

$$\Delta T_2 = \frac{P_2 t}{(m - \Delta m)c} = \frac{m}{m - \Delta m} \Delta T_1. \tag{42}$$

Отношение $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}$ можно найти по клеткам на графике. Оно равно $\frac{15}{14}$. Таким образом,

$$\frac{m}{m - \Delta m} = \frac{15}{14} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{15}. \tag{43}$$

Получили, что за один цикл испаряется $\frac{1}{15}$ часть исходной массы воды в чайнике. Значит, после пяти отключений, то есть за четыре полных цикла, испарится $\frac{4}{15}$ часть. Таким образом, объём воды в чайнике уменьшится в

$$\frac{1}{1 - \frac{4}{15}} = \frac{15}{11} \tag{44}$$

раза.

Ответ: После пяти отключений объём воды в чайнике уменьшится в $\frac{15}{11}$ раза.

№	Критерий	Баллы
1	Получено, что Δm не зависит от номера цикла.	4
2	Отношение масс в первом и втором цикле связано с графиком (как в авторском решении или через коэффициенты наклона участков графика.)	4
3	Получен ответ.	2
Сумма		10