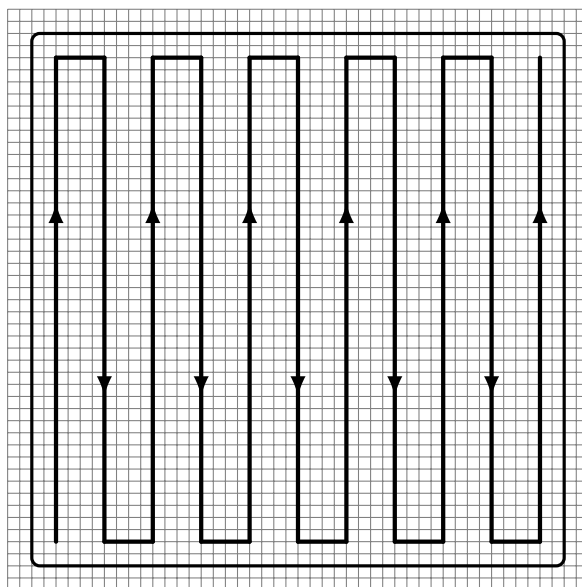
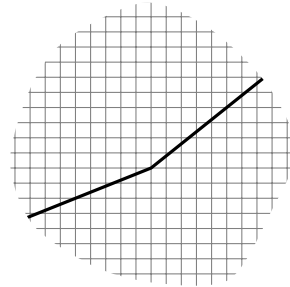
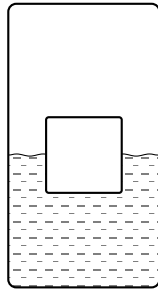


1	<p>Служил Гаврила трактористом.... Он занимался поливом растений на квадратном земельном участке. Для этого он, стартуя из угла, проезжал по этому участку «змейкой» вдоль показанной на рисунке траектории, совершая при этом 10 разворотов. На полив такого участка Гаврила затрачивал 20 минут.</p> <p>Какое время понадобится Гавриле для полива «змейкой» квадратного участка с вдвое большим периметром, если известно, что из-за конструкции системы полива он должен сохранять такое же расстояние между продольными проездами?</p>
---	---



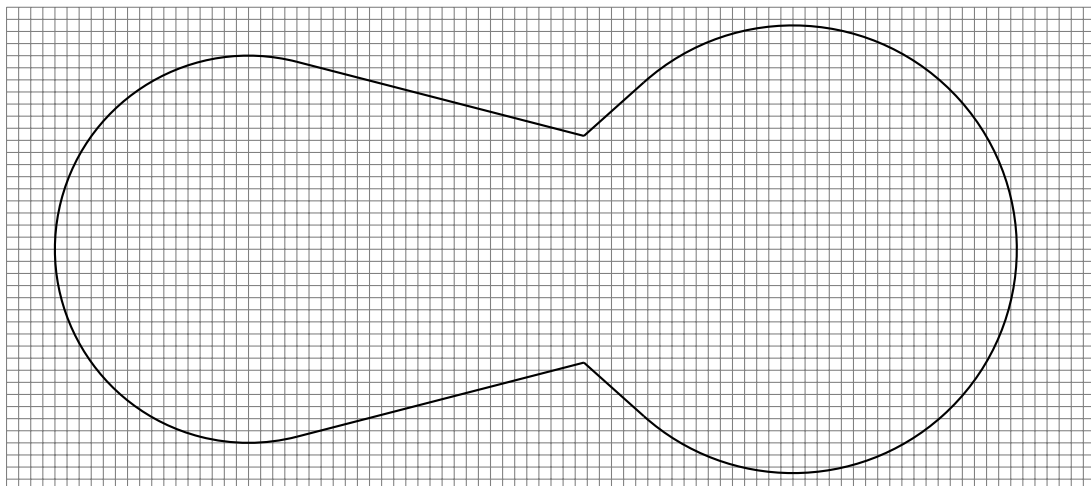
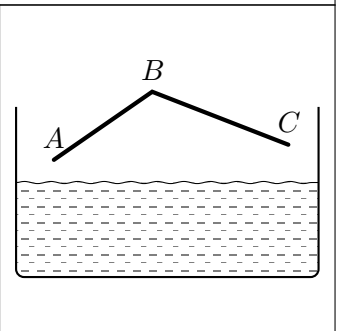
2	<p>Работал грузчиком Гаврила.... Он заметил, что если массивный стержень подвесить с помощью двух одинаковых пружин за его концы, то он будет находиться на расстоянии 12 см от потолка. А если подвесить систему из стержней такой же массы и таких же пружин так, как показано на рисунке, то нижний стержень будет располагаться на расстоянии 25 см от потолка. Найдите начальную длину пружины.</p>	
3	<p>Гаврила садоводом был.... Однажды он разрезал яблоко на две половинки одинаковой массы. Затем одну из половинок он разрезал ещё на две части так, чтобы объёмы получившихся частей были равны. Оказалось, что плотность самой тяжёлой части из трех оказалась в 2 раз больше плотности второй части и в 3 раз больше плотности третьей части. Найдите массы всех трех частей, если масса целого яблока составляла 200 грамм.</p>	
4	<p>Гаврила был водопроводчик.... Он соединил два сосуда постоянного сечения трубкой. Один из сосудов закрыт сверху и снизу подвижными поршнями, подвешенными на одинаковых пружинах. Если в открытый сосуд заливать по 1 литру воды в минуту, то разность скоростей, с которыми движутся поршни в левом сосуде составит 5 см/мин, а уровень воды в открытом сосуде будет подниматься со скоростью 10 см/мин. Определите площадь сечения открытого сосуда, если жесткость пружин равна 100 Н/м.</p>	

5	<p>Служил Гаврила рыболовом.... Он поместил на дно закрытого сосуда поплавков в форме кубика. Сосуд медленно наполнили, добавляя в него одинаковое количество воды в единицу времени. Получаемую при этом зависимость давления воды на дне сосуда от времени нанесли на график. На рисунке приведен фрагмент этого графика, однако масштабы осей на этот фрагмент не попали. Помогите Гавриле найти объём поплавка, если площадь сечения сосуда постоянна и равна 50 см^2.</p>
---	---



6	<p>Гаврила был велоатлетом.... Однажды, в связи со сложившейся эпидемиологической ситуацией, был проведён виртуальный велоаезд, в котором каждый велосипедист перемещался по виртуальной кольцевой трассе с помощью велотренажёра. В нём приняли участие Гаврила и ещё 21000 велосипедистов. Оказалось, что ровно 1000 из них ехало с постоянной скоростью 20 км/ч, ещё 1000 — с постоянной скоростью 21 км/ч, и так далее до 40 км/ч. Гаврила ехал с неизвестной постоянной скоростью и считал, сколько велосипедистов он обогнал, и, сколько велосипедистов обогнало его. По его подсчётам получилось, что его обогнало в 4 раза больше велосипедистов, чем он обогнал сам.</p> <p>Найдите скорость Гаврилы, если все велосипедисты стартовали в разное время и равномерно распределились по трассе.</p>
---	---

7	<p>Гаврила металлургом был.... Для охлаждения детали, состоящей из двух скреплённых концами тонких стержней, Гаврила погрузил её в масло вертикально, с постоянной скоростью 5 см/с. Из за этого на поверхности масла образовалась волна, которая в некоторый момент приняла форму, показанную на рисунке.</p> <p>Найдите, сколько времени прошло с момента погружения точек A, B и C, если скорость движения волны по поверхности масла также равна 5 см/с. Сторона одной клетки на рисунке соответствует длине 1 см.</p>
---	--



Задача 2. Работал грузчиком Гаврила....

Обозначим высоту, на которой висит отдельно подвешенный стержень за $h = 12$ см, высоту, на которой висит нижний стержень в системе за $H = 25$ см, а начальную длину пружины за ℓ_0 . Запишем условие равновесия одного, отдельно подвешенного стержня

$$mg = 2k(h - \ell_0), \quad (4)$$

где k это жёсткость одной пружины.

В системе стержней для нижнего стержня выполняется это же уравнение, и сила натяжения каждой из пружин равна $\frac{mg}{2}$. А тогда, обозначив за x высоту, на которой висят верхние стержни, получим, что выполняются следующие уравнения

$$\frac{3}{2}mg = 2k(x - \ell_0), \quad (5)$$

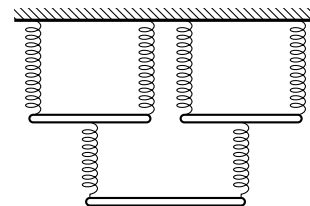
$$x + h = H. \quad (6)$$

Решая уравнения вместе с предыдущим, получаем

$$\ell_0 = 5h - 2H = 10 \text{ см}. \quad (7)$$

Ответ: Начальная длина пружины равна 10 см.

№	Критерий	Баллы
1	Уравнение равновесия для верхнего стержня в системе	2
2	Получено уравнение на ℓ_0	1
3	Получен верный ответ	1
Сумма		4



Задача 3. Гаврила садоводом был....

Наиболее тяжёлой половинкой является та, которую не разрезали. Тогда, плотности оставшихся половинок относятся как 2 к 3. Так как их объёмы равны, их массы относятся так же, а в сумме дают половину массы яблока. Тогда нетрудно найти массы всех частей: 100 г, 60 г и 40 г.

Ответ: Массы частей равны 100 г, 60 г и 40 г.

№	Критерий	Баллы
1	Найдено отношение масс меньших частей	2
2	Получен верный ответ	2
Сумма		4

Задача 4. Гаврила был водопроводчик....

Найдём, какая часть воды при наливании поступает в левый сосуд. Пусть верхний и нижний поршни в некоторый момент находятся на высотах h_1 и h_2 . Можно заметить, что разность сил упругости верхней и нижней пружин должна уравновешивать силу тяжести воды в левом сосуде

$$mg = F_2 - F_1. \quad (8)$$

При добавлении воды меняются уровни h_1 и h_2 на δh_1 и δh_2 соответственно. Силы упругости меняются пропорционально

$$\delta F_1 = k \cdot \delta h_1, \quad (9)$$

$$\delta F_2 = k \cdot \delta h_2. \quad (10)$$

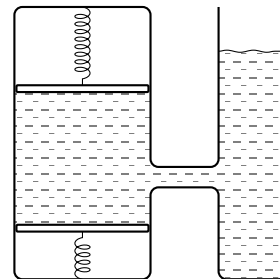
Тогда масса воды в левом сосуде меняется со скоростью

$$\delta m = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{g} = \frac{5 \text{ см/мин} \cdot 100 \text{ Н/м}}{10 \text{ Н/кг}} = 0,5 \text{ кг}. \quad (11)$$

Значит в минуту в правый сосуд поступает только 0,5 литра воды.

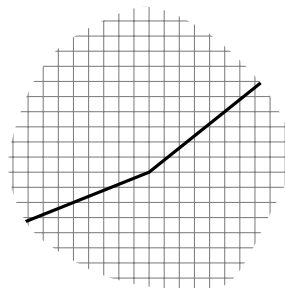
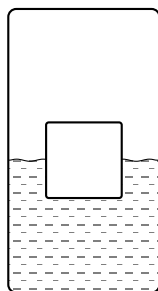
Так как уровень при этом поднимается со скоростью 10 см/мин, площадь сечения равна 50 см².

Ответ: Площадь сечения равна 50 см².



№	Критерий	Баллы
1	Найдено количество воды, остающееся в правом сосуде	2
2	Получен верный ответ	2
Сумма		4

Задача 5. Служил Гаврила рыболовом....



До тех пор пока кубик плавает в воде не касаясь дна или крышки давление на дне растет равномерно, так как вода в сосуд поступает равномерно. Угловой коэффициент графика при этом равен

$$k_1 = \rho g \frac{\delta V}{\delta t} \frac{1}{S}, \quad (12)$$

где S - это площадь сечения сосуда.

В момент, когда кубик касается крышки, скорость поднятия уровня воды увеличивается, так как эффективная площадь сечения теперь равна разности площади сечения сосуда и площади кубика S_k , а коэффициент наклона

$$k_2 = \rho g \frac{\delta V}{\delta t} \frac{1}{S - S_k}. \quad (13)$$

Из графика $k_2 = 2k_1$, а тогда

$$1 - \frac{S_k}{S} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

и $S_k = 25 \text{ см}^2$. Объём, следовательно, равен 125 см^3 .

Ответ: Объём равен 125 см^3 .

№	Критерий	Баллы
1	Связь излома с моментом касания крышки	4
2	Обратная пропорциональность углового коэффициента площади сечения	2
3	Получен верный ответ	2
Сумма		8

Задача 6. Гаврила был велоатлетом....

Пусть длина трассы равна L , а заезд продолжался некоторое время T . Пусть также Гаврила ехал со скоростью v . Вычислим, сколько велосипедистов он обогнал среди тех, кто ехал со скоростью u . Это число равно

$$N_u^- = 1000 \cdot \frac{(v-u) \cdot T}{L} \quad (15)$$

Эту величину нужно просуммировать по всем скоростям $u < v$. Аналогично для количества велосипедистов, обогнавших Гаврилу, нужно суммировать по всем скоростям $u > v$ эту же величину с обратным знаком разности скоростей.

Сначала найдём, между какими целыми значениями скоростей находится скорость v .

Возьмём $v = 27$ км/ч.

$$N^- = N_{20}^- + N_{21}^- + N_{22}^- + N_{23}^- + N_{24}^- + N_{25}^- + N_{26}^- = 1000 \cdot \frac{T}{L} (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 1000 \cdot \frac{T}{L} \cdot 28, \quad (16)$$

$$N^+ = N_{28}^+ + \dots + N_{40}^+ = 1000 \cdot \frac{T}{L} (1 + \dots + 13) = 1000 \cdot \frac{T}{L} \cdot 91. \quad (17)$$

$$(18)$$

В таком случае $\frac{N^+}{N^-} = 3,25$.

Возьмём $v = 26$ км/ч.

$$N^- = N_{20}^- + \dots + N_{25}^- = 1000 \cdot \frac{T}{L} (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 1000 \cdot \frac{T}{L} \cdot 21, \quad (19)$$

$$N^+ = N_{27}^+ + \dots + N_{40}^+ = 1000 \cdot \frac{T}{L} (1 + \dots + 14) = 1000 \cdot \frac{T}{L} \cdot 105. \quad (20)$$

$$(21)$$

В таком случае $\frac{N^+}{N^-} = 5$.

Значит нужное нам значение скорости лежит между 26 км/ч и 27 км/ч. Это значит, что $v = 26$ км/ч + x , и

$$N^- = N_{20}^- + \dots + N_{26}^- = 1000 \cdot \frac{T}{L} (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 7 \cdot x) = 1000 \cdot \frac{T}{L} \cdot (21 + 7x), \quad (22)$$

$$N^+ = N_{27}^+ + \dots + N_{40}^+ = 1000 \cdot \frac{T}{L} (1 + \dots + 14 - 14 \cdot x) = 1000 \cdot \frac{T}{L} \cdot (105 - 14x). \quad (23)$$

$$(24)$$

Так как $\frac{N^+}{N^-} = 4$

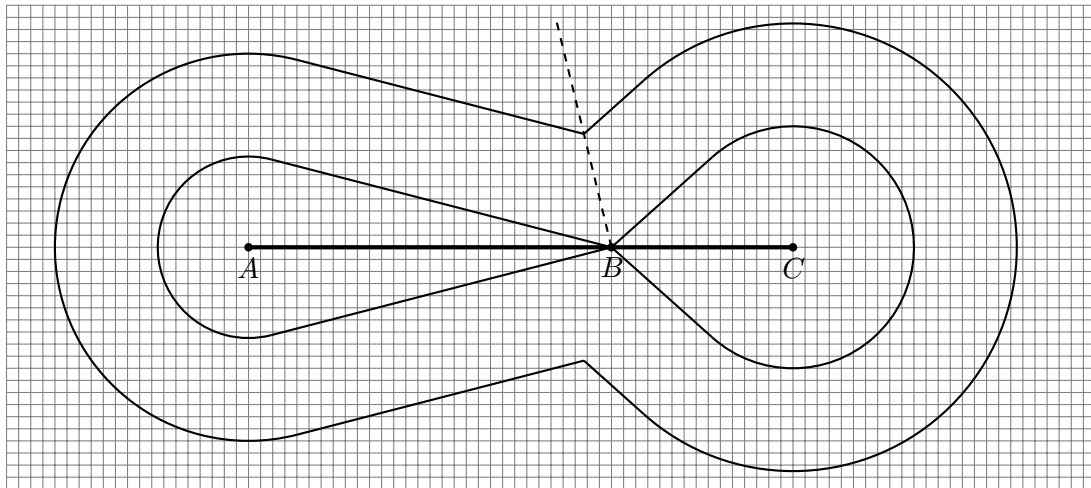
$$4 \cdot (21 + 7x) = 105 - 14x, \quad (25)$$

и $x = 0,5$ км/ч.

Ответ: Скорость Гаврилы равна 26,5 км/ч.

№	Критерий	Баллы
1	Пропорциональность числа обогнанных разности скоростей для одной скоростной группы	3
2	Вычислено число обогнанных при каком-нибудь выборе скорости v или в общем виде	3
3	Получен верный ответ	2
Сумма		8

Задача 7. Гаврила металлургом был....



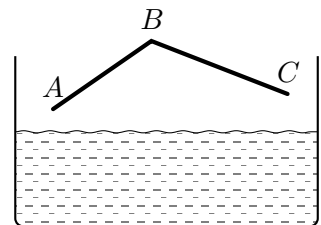
Для начала найдём расположение точек погружения концов стержней. При погружении каждая точка создаёт волну, расходящуюся во все стороны. При погружении стержня под углом, волны от всех точек образуют фронт, образованный дугами окружностей и прямыми отрезками. В момент погружения точки B , фронты от двух стержней пересекаются именно в этой точке. В дальнейшем точка пересечения двух фронтов всегда будет лежать на биссектрисе образованного ими угла, что позволяет нам найти положение точки B .

Положение точек A и C можно найти, определив положения центров дуг окружностей.

Пользуясь масштабом на рисунке, мы можем определить расстояние, пройденное волной с момента погружения каждой из точек.

Так, с момента погружения точки A волна прошла 16 см, а значит пошло 3,2 секунды. С момента погружения точки C волна прошла 18,5 см, а значит пошло 3,7 секунды. С момента погружения точки B волна прошла примерно 10 см, а значит пошло 2 секунды.

Ответ: С момента погружения точек A, B, C прошло соответственно 3,2, 2 и 3,7 секунд.



№	Критерий	Баллы
1	Положение точки A	1
2	Положение точки B	2
3	Положение точки C	1
4	Время для точки A	1
5	Время для точки B	2
6	Время для точки C	1
Сумма		8