Возможные решения задач
7 класс
1-й вариант

Задача 1.

Вспомним определение средней плотности. Средняя плотность любого тела, из какого бы количества частей оно ни состояло, равна суммарной массе всех частей, делённой на суммарный объём этих частей. Тогда для детали из условия можно написать, что средняя плотность до нагревания

$$\rho_{\text{хол.}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}, \tag{1}$$

где за m_1, m_2 и V_1, V_2 обозначены массы и объёмы первой и второй частей соответственно.
После нагревания объём первой части увеличился на 5% и стал равен $V_1' = 1{,}05V_1$. Объём второй увеличился на 2% и стал равен $V_2' = 1{,}02V_2$. Средняя плотность уменьшилась на 3% и стала равна $\rho_{\text{нагрет.}} = 0{,}97\rho_{\text{хол.}}$. При этом массы частей остались неизменными, поэтому мы можем написать, по определению средней плотности,

$$\rho_{\text{нагрет.}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1' + V_2'}. \tag{2}$$

Из формул (1),(2) и соотношений величин до и после нагревания мы можем составить следующие соотношения

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= \left(V_1' + V_2'\right)\rho_{\text{нагрет.}} = \left(1{,}05V_1 + 1{,}02V_2\right)0{,}97\rho_{\text{хол.}} \\ m_1 + m_2 &= \left(V_1 + V_2\right)\rho_{\text{хол.}} \end{aligned} \tag{3}$$

Приравнивая правые части, и, сокращая на $\rho_{\text{хол.}}$, получаем уравнение

$$0{,}97\left(1{,}05V_1 + 1{,}02V_2\right) = V_1 + V_2. \tag{4}$$

Решая это уравнение, получаем ответ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 - 0{,}97 \cdot 1{,}02}{0{,}97 \cdot 1{,}05 - 1} = 0{,}57, \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\frac{V_1}{V_2}} = 1{,}74. \tag{5}$$

<u>**Ответ:**</u> Отношение объёмов частей равно $0{,}57$ или $1{,}74$.

№	Критерий	Баллы
1	Записано или явно использовано определение плотности в виде $\rho = \frac{m}{V}$.	2
2	Получено уравнение (4) или эквивалентное, связывающее V_1 и V_2	4
3	Использовано верное соотношение $\rho_{\text{нагрет.}} = 0{,}97\rho_{\text{хол.}}$	2
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10

Задача 2.

Чтобы поехать друг другу навстречу друзьям нужно сначала доехать в исходном направлении до конца, а затем отстоять очередь и сесть на подъёмник снова. Обозначим часть подъёма, которую после этого преодолел ехавший вниз друг за x. Тогда время, которое он затратил на все этапы с момента предыдущей встречи равно

$$\frac{T}{2} + T_1 + xT. \tag{6}$$

Второй друг после «разворота» успеет проехать $1 - x$ часть склона и суммарно затратит время, равное

$$\frac{T}{2} + T_2 + (1 - x)T. \tag{7}$$

Так как друзья встретились, эти времена должны быть равны, а значит можно составить уравнение

$$\frac{T}{2} + T_1 + xT = \frac{T}{2} + T_2 + (1 - x)T, \tag{8}$$

откуда находим

$$x = \frac{T_2 - T_1 + T}{2T} = \frac{4\text{ мин} - 9\text{ мин} + 10\text{ мин}}{20\text{ мин}} = \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Ответ: Друг, изначально ехавший вниз, успеет преодолеть $\frac{1}{4}$ подъёма.

№	Критерий	Баллы
1	Записано или явно использовано условие того, что друзья встретились в одной точке, например введены величины x и $1 - x$	2
2	Записано или явно использовано условие того, что друзья оказались в этой точке в один и тот же момент времени, например получено равенство (8)	2
3	Получена связь пройденных путей с затраченным временем, например получены равенства (6),(7)	4
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10

Задача 3.

Для начала разберёмся, как связано пройденное велосипедом расстояние с количеством оборотов колес, шестерёнок и педалей. Предположим, что заднее колесо совершило один полный оборот. Тогда, так как колесо не проскальзывает, велосипед прошёл путь, равный длине окружности этого колеса L. Задняя шестерёнка также совершила один полный оборот, поэтому цепь провернулась на величину ℓ. Так как передняя шестерёнка имеет большую длину оружности, чем задняя, она при этом не успеет сделать целый оборот, а пройдет только его часть, раную отношению $\frac{\ell}{s}$, где за s обозначена длина окружности передней шестерёнки.
Теперь предположим, что велосипед прошёл расстояне D. Тогда колесо и задняя шестерёнка совершили число оборотов, равное $\frac{D}{L}$, а передняя шестерёнка и педали

$$N = \frac{D}{L} \cdot \frac{\ell}{s}. \tag{10}$$

Если мальчики едут с одной скоростью, то растояние D, пройденное за единицу времени у них одинаковое. А величины L, ℓ и s разные для двух велосипедов и пропорциональны росту Саши и Паши

$$\frac{L_С}{L_П} = \frac{\ell_С}{\ell_П} = \frac{s_С}{s_П} = \frac{1{,}40}{1{,}50}. \tag{11}$$

Тогда количества оборотов, которые приходилось совершать Саше и Паше до того, как они поменялись шестерёнками, относились, как

$$\frac{N_С}{N_П} = \frac{\frac{D}{L_С} \cdot \frac{\ell_С}{s_С}}{\frac{D}{L_П} \cdot \frac{\ell_П}{s_П}} = \frac{L_П}{L_С} \cdot \frac{\ell_С}{\ell_П} \cdot \frac{s_П}{s_С} \tag{12}$$

После того, как задние шестерёнки были поменяны местами, в формуле нужно поменять местами $\ell_С$ и $\ell_П$. В итоге получаем, что количества оборотов относятся как

$$\frac{N_С}{N_П} = \frac{L_П}{L_С} \cdot \frac{\ell_П}{\ell_С} \cdot \frac{s_П}{s_С} = \left(\frac{1{,}50}{1{,}40}\right)^3 = 1{,}23. \tag{13}$$

<u>Ответ:</u> Саше нужно крутить педали в 1,23 раза чаще.

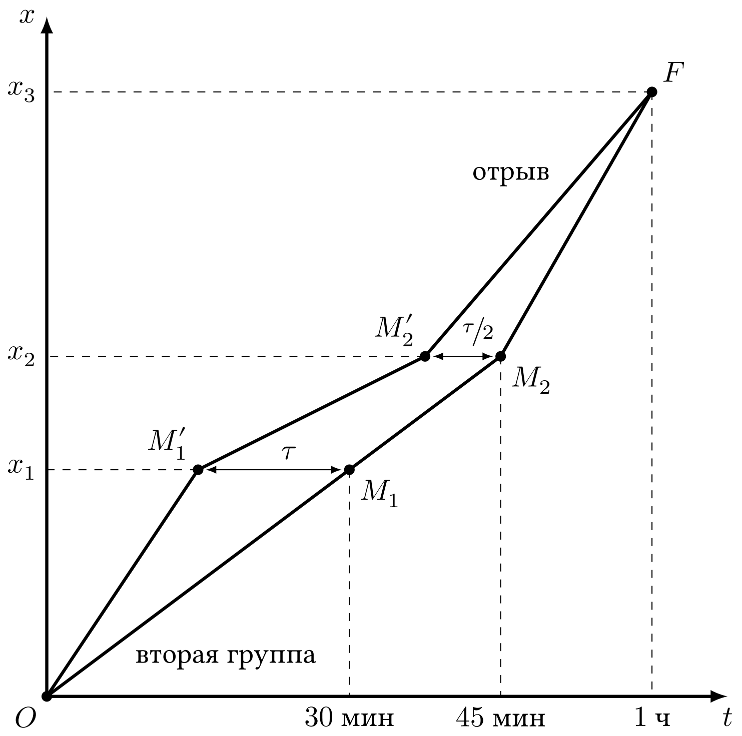
№	**Критерий**	**Баллы**
1	Указано, что размер колеса влияет на количество оборотов	2
2	Указано, что соотношение размеров передней и задней шестерёнок влияет на количество оборотов	2
3	Получена правильная пропорциональность числа оборотов геометрическим параметрам велосипеда (формула (10) или (12), (13))	4
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10

Задача 4.

Построим схематичный график зависимости координаты от времени для обеих групп. На таком графике точки на одной высоте соответствуют одному и тому же положению, а расстояние по горизонтали соответствует временному промежутку или времени отрыва. Обозначим максимальное время отрыва за τ. На графике оно соответствует отрезку M_1M_1'.

Так как время отрыва сначала равномерно росло, а затем равномерно уменьшалось, расстояние между графиками второй группы и отрыва также будет равномерно увеличиваться до отрезка M_1M_1', а затем равномерно уменьшаться. Тогда длина отрезка M_2M_2' будет равна $\tau/2$, а график движения отрыва будет образован тремя отрезками, проходящими через точки O, M_1', M_2', F.

Каждому отрезку будет соответствовать своя скорость u_1, u_2 и u_3. Вычислим эти скорости.



Скорость u_1 будет равна

$$u_1 = \frac{x_1}{30\text{ мин} - \tau} = \frac{30\text{ км/ч} \cdot 30\text{ мин}}{30\text{ мин} - 3\text{ мин}} \approx 33{,}3\text{ км/ч}. \tag{14}$$

Скорость u_2 будет равна

$$u_2 = \frac{x_2 - x_1}{15\text{ мин} + \tau - {}^{\tau}\!/_2} = \frac{30\text{ км/ч} \cdot 15\text{ мин}}{15\text{ мин} + 3\text{ мин} - 1{,}5\text{ мин}} \approx 27{,}3\text{ км/ч}. \tag{15}$$

Скорость u_3 будет равна

$$u_3 = \frac{x_3 - x_2}{15\text{ мин} + {}^{\tau}\!/_2} = \frac{50\text{ км/ч} \cdot 15\text{ мин}}{15\text{ мин} + 1{,}5\text{ мин}} \approx 45{,}5\text{ км/ч}. \tag{16}$$

Таким образом максимальная скорость равняется 45,5 км/ч, а минимальная 27,3 км/ч.

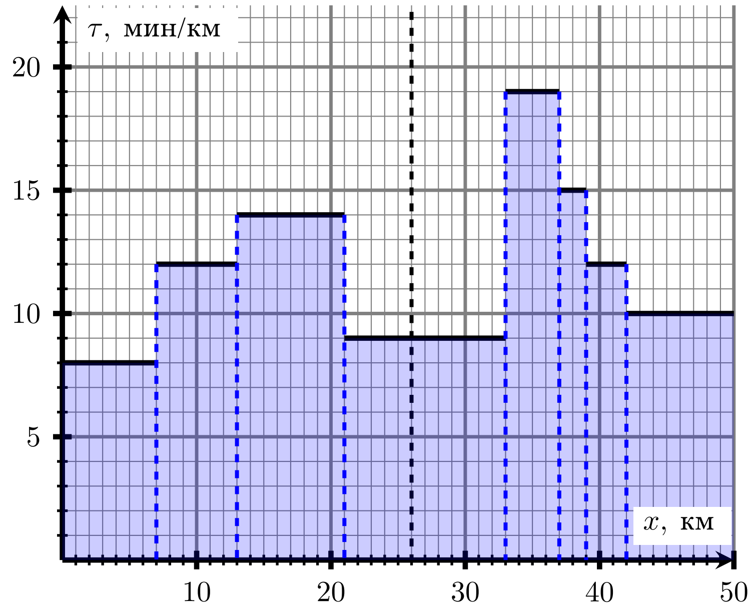
Ответ: Максимальная скорость равняется 45,5 км/ч, а минимальная 27,3 км/ч.

№	Критерий	Баллы
1	Показано, что у отрыва будет три значения скорости	4
2	Получен верный ответ для минимальной скорости	3
3	Получен верный ответ для максимальной скорости	3
Сумма		10

Задача 5.

Предположим, что Гриша двигался бы с постоянным темпом τ и прошел бы расстояние s. Тогда, по определению темпа, он потратил на это движение время $t = \tau \cdot s$. Отметим, в этом случае эта величина равна площади под графиком зависимости темпа от положения. Так как Гриша последовательно преодолевал участки с постоянным темпом, времена прохождения этих участков будут складываться, и суммарное время будет равно суммарной площади под графиком.

Таким образом, для нахождения расстояния, пройденного за половину времени нам следует провести такую вертикальную прямую, которая бы разделяла фигуру под графиком на две фигуры равной площади.



Вычислим по клеточкам площадь каждого участка и всей фигуры

$$
\begin{gathered}
t_1 = 56 \text{ мин}, \quad t_2 = 72 \text{ мин}, \quad t_3 = 112 \text{ мин}, \quad t_4 = 108 \text{ мин}, \\
t_5 = 76 \text{ мин}, \quad t_6 = 30 \text{ мин}, \quad t_7 = 36 \text{ мин}, \quad t_8 = 80 \text{ мин}, \\
t_{\text{общ.}} = 570 \text{ мин}
\end{gathered} \tag{17}
$$

Половина времени составляет 285 мин, а первые три участка в сумме дают 240 мин. Тогда от четвертого участка следует отрезать часть с площадью 45 мин. Для этого нужно провести прямую, проходящую через отметку 26 км.

А это значит, что за первую половину времени тренировки Гриша преодолел 26 километров.

Ответ: Гриша преодолел 26 км.

№	Критерий	Баллы
1	Указан способ нахождения времени по значению темпа и перемещения	2
2	Верно вычислено время одного из участков	3
3	Найдено на каком из участков расположена середина тренировки по времени	3
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10

Возможные решения задач
7 класс
2-й вариант

Задача 1.

Вспомним определение средней плотности. Средняя плотность любого тела, из какого бы количества частей оно ни состояло, равна суммарной массе всех частей, делённой на суммарный объём этих частей. Тогда для детали из условия можно написать, что средняя плотность до нагревания

$$\rho_{\text{хол.}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}, \tag{1}$$

где за m_1, m_2 и V_1, V_2 обозначены массы и объёмы первой и второй частей соответственно.
После нагревания объём первой части увеличился на 7% и стал равен $V_1' = 1{,}07V_1$. Объём второй увеличился на 4% и стал равен $V_2' = 1{,}04V_2$. Средняя плотность уменьшилась на 5% и стала равна $\rho_{\text{нагрет.}} = 0{,}95\rho_{\text{хол.}}$. При этом массы частей остались неизменными, поэтому мы можем написать, по определению средней плотности,

$$\rho_{\text{нагрет.}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1' + V_2'}. \tag{2}$$

Из формул (1),(2) и соотношений величин до и после нагревания мы можем составить следующие соотношения

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= \left(V_1' + V_2'\right)\rho_{\text{нагрет.}} = \left(1{,}07V_1 + 1{,}04V_2\right)0{,}95\rho_{\text{хол.}} \\ m_1 + m_2 &= \left(V_1 + V_2\right)\rho_{\text{хол.}} \end{aligned} \tag{3}$$

Приравнивая правые части, и, сокращая на $\rho_{\text{хол.}}$, получаем уравнение

$$0{,}95\left(1{,}07V_1 + 1{,}04V_2\right) = V_1 + V_2. \tag{4}$$

Решая это уравнение, получаем ответ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 - 0{,}95 \cdot 1{,}04}{0{,}95 \cdot 1{,}07 - 1} = 0{,}73, \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\frac{V_1}{V_2}} = 1{,}375. \tag{5}$$

<u>Ответ:</u> Отношение объёмов частей равно $0{,}73$ или $1{,}375$.

№	Критерий	Баллы
1	Записано или явно использовано определение плотности в виде $\rho = \frac{m}{V}$.	2
2	Получено уравнение (4) или эквивалентное, связывающее V_1 и V_2	4
3	Использовано верное соотношение $\rho_{\text{нагрет.}} = 0{,}95\rho_{\text{хол.}}$	2
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10

Примечание: В этом варианте в условии была допущена опечатка, а именно, величины 5% и 4% были перепутаны местами. В случае, если в работе используются следующие данные:

- Увеличение объёма второй детали — 5%
- Уменьшение средней плотности — 4%

в ответе получается отрицательное отношение объёмов ($\frac{V_1}{V_2} = -0{,}29$, $\frac{V_2}{V_1} = -3{,}4$). В этом случае следует оценивать такое решение по той же разбалловке, но не учитывая конкретные числа. Ставить баллы за отрицательный ответ следует в том случае, если процедура его получения верна.

Задача 2.

Чтобы поехать друг другу навстречу друзьям нужно сначала доехать в исходном направлении до конца, а затем отстоять очередь и сесть на подъёмник снова. Обозначим часть подъёма, которую после этого преодолел ехавший вниз друг за x. Тогда время, которое он затратил на все этапы с момента предыдущей встречи равно

$$\frac{T}{2} + T_1 + xT. \tag{6}$$

Второй друг после «разворота» успеет проехать $1 - x$ часть склона и суммарно затратит время, равное

$$\frac{T}{2} + T_2 + (1 - x)T. \tag{7}$$

Так как друзья встретились, эти времена должны быть равны, а значит можно составить уравнение

$$\frac{T}{2} + T_1 + xT = \frac{T}{2} + T_2 + (1 - x)T, \tag{8}$$

откуда находим

$$x = \frac{T_2 - T_1 + T}{2T} = \frac{6 \text{ мин} - 3 \text{ мин} + 15 \text{ мин}}{30 \text{ мин}} = \frac{3}{5}. \tag{9}$$

Ответ: Друг, изначально ехавший вниз, успеет преодолеть $\frac{3}{5}$ подъёма.

№	Критерий	Баллы
1	Записано или явно использовано условие того, что друзья встретились в одной точке, например введены величины x и $1 - x$	2
2	Записано или явно использовано условие того, что друзья оказались в этой точке в один и тот же момент времени, например получено равенство (8)	2
3	Получена связь пройденных путей с затраченным временем, например получены равенства (6),(7)	4
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10

Задача 3.

Для начала разберёмся, как связано пройденное велосипедом расстояние с количеством оборотов колес, шестерёнок и педалей. Предположим, что заднее колесо совершило один полный оборот. Тогда, так как колесо не проскальзывает, велосипед прошёл путь, равный длине окружности этого колеса L. Задняя шестерёнка также совершила один полный оборот, поэтому цепь провернулась на величину ℓ. Так как передняя шестерёнка имеет большую длину оружности, чем задняя, она при этом не успеет сделать целый оборот, а пройдет только его часть, раную отношению $\frac{\ell}{s}$, где за s обозначена длина окружности передней шестерёнки.

Теперь предположим, что велосипед прошёл расстояне D. Тогда колесо и задняя шестерёнка совершили число оборотов, равное $\frac{D}{L}$, а передняя шестерёнка и педали

$$N = \frac{D}{L} \cdot \frac{\ell}{s}. \tag{10}$$

Если мальчики едут с одной скоростью, то растояние D, пройденное за единицу времени у них одинаковое. А величины L, ℓ и s разные для двух велосипедов и пропорциональны росту Саши и Паши

$$\frac{L_\text{С}}{L_\text{П}} = \frac{\ell_\text{С}}{\ell_\text{П}} = \frac{s_\text{С}}{s_\text{П}} = \frac{1{,}30}{1{,}60}. \tag{11}$$

Тогда количества оборотов, которые приходилось совершать Саше и Паше до того, как они поменялись шестерёнками, относились, как

$$\frac{N_\text{С}}{N_\text{П}} = \frac{\frac{D}{L_\text{С}} \cdot \frac{\ell_\text{С}}{s_\text{С}}}{\frac{D}{L_\text{П}} \cdot \frac{\ell_\text{П}}{s_\text{П}}} = \frac{L_\text{П}}{L_\text{С}} \cdot \frac{\ell_\text{С}}{\ell_\text{П}} \cdot \frac{s_\text{П}}{s_\text{С}} \tag{12}$$

После того, как задние шестерёнки были поменяны местами, в формуле нужно поменять местами $\ell_\text{С}$ и $\ell_\text{П}$. В итоге получаем, что количества оборотов относятся как

$$\frac{N_\text{С}}{N_\text{П}} = \frac{L_\text{П}}{L_\text{С}} \cdot \frac{\ell_\text{П}}{\ell_\text{С}} \cdot \frac{s_\text{П}}{s_\text{С}} = \left(\frac{1{,}60}{1{,}30}\right)^3 = 1{,}86. \tag{13}$$

Ответ: Саше нужно крутить педали в 1,86 раза чаще.

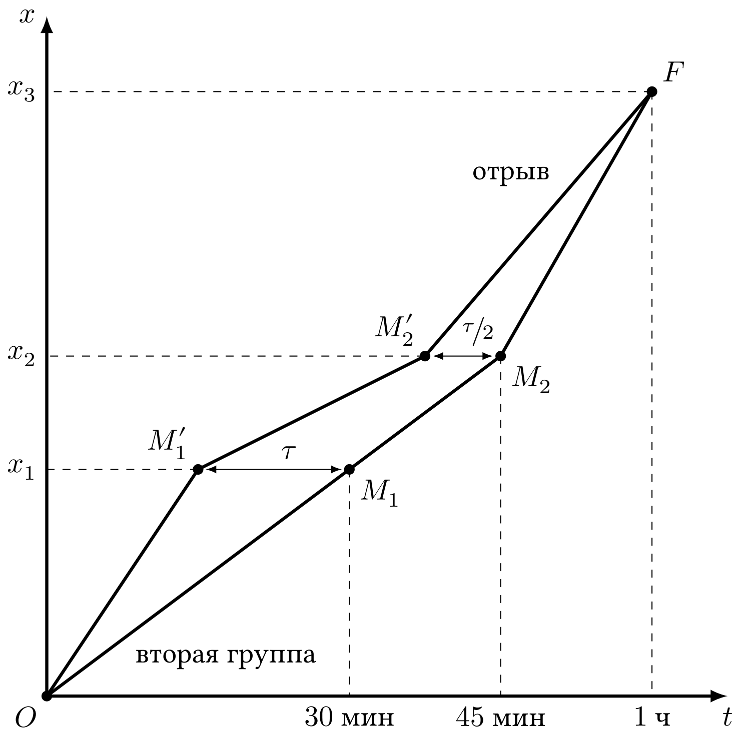
№	Критерий	Баллы
1	Указано, что размер колеса влияет на количество оборотов	2
2	Указано, что соотношение размеров передней и задней шестерёнок влияет на количество оборотов	2
3	Получена правильная пропорциональность числа оборотов геометрическим параметрам велосипеда (формула (10) или (12), (13))	4
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10

Задача 4.

Построим схематичный график зависимости координаты от времени для обеих групп. На таком графике точки на одной высоте соответствуют одному и тому же положению, а расстояние по горизонтали соответствует временному промежутку или времени отрыва. Обозначим максимальное время отрыва за τ. На графике оно соответствует отрезку M_1M_1'.

Так как время отрыва сначала равномерно росло, а затем равномерно уменьшалось, расстояние между графиками второй группы и отрыва также будет равномерно увеличиваться до отрезка M_1M_1', а затем равномерно уменьшаться. Тогда длина отрезка M_2M_2' будет равна $\tau/2$, а график движения отрыва будет образован тремя отрезками, проходящими через точки O, M_1', M_2', F.

Каждому отрезку будет соответствовать своя скорость u_1, u_2 и u_3. Вычислим эти скорости.



Скорость u_1 будет равна

$$u_1 = \frac{x_1}{30\text{ мин} - \tau} = \frac{40\text{ км/ч}\cdot 30\text{ мин}}{30\text{ мин} - 6\text{ мин}} \approx 50\text{ км/ч}. \tag{14}$$

Скорость u_2 будет равна

$$u_2 = \frac{x_2 - x_1}{15\text{ мин} + \tau - \tau/2} = \frac{40\text{ км/ч}\cdot 15\text{ мин}}{15\text{ мин} + 6\text{ мин} - 3\text{ мин}} \approx 33{,}3\text{ км/ч}. \tag{15}$$

Скорость u_3 будет равна

$$u_3 = \frac{x_3 - x_2}{15\text{ мин} + \tau/2} = \frac{50\text{ км/ч}\cdot 15\text{ мин}}{15\text{ мин} + 3\text{ мин}} \approx 41{,}7\text{ км/ч}. \tag{16}$$

Таким образом максимальная скорость равняется 50 км/ч, а минимальная 33,3 км/ч.

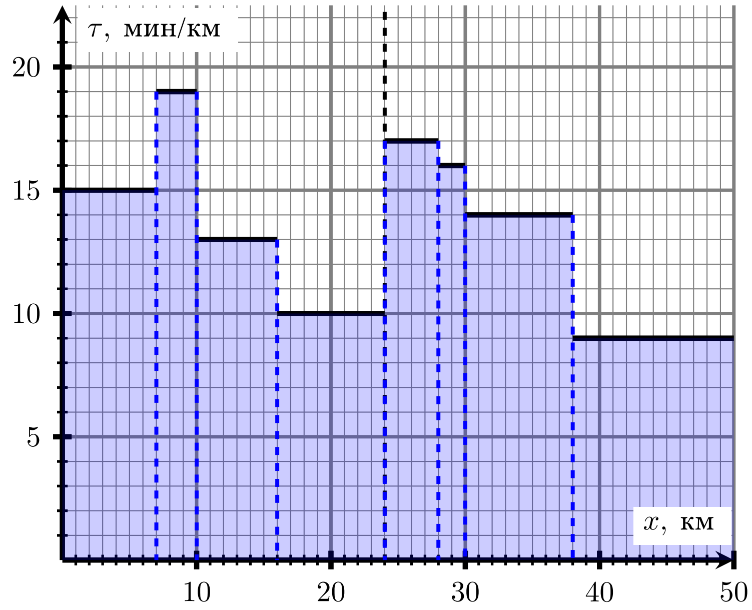
Ответ: Максимальная скорость равняется 50 км/ч, а минимальная 33,3 км/ч.

№	Критерий	Баллы
1	Показано, что у отрыва будет три значения скорости	4
2	Получен верный ответ для минимальной скорости	3
3	Получен верный ответ для максимальной скорости	3
Сумма		10

Задача 5.

Предположим, что Гриша двигался бы с постоянным темпом τ и прошел бы расстояние s. Тогда, по определению темпа, он потратил на это движение время $t = \tau \cdot s$. Отметим, в этом случае эта величина равна площади под графиком зависимости темпа от положения. Так как Гриша последовательно преодолевал участки с постоянным темпом, времена прохождения этих участков будут складываться, и суммарное время будет равно суммарной площади под графиком.

Таким образом, для нахождения расстояния, пройденного за половину времени нам следует провести такую вертикальную прямую, которая бы разделяла фигуру под графиком на две фигуры равной площади.



Вычислим по клеточкам площадь каждого участка и всей фигуры

$$
\begin{gathered}
t_1 = 105 \text{ мин}, \quad t_2 = 57 \text{ мин}, \quad t_3 = 78 \text{ мин}, \quad t_4 = 80 \text{ мин}, \\
t_5 = 68 \text{ мин}, \quad t_6 = 32 \text{ мин}, \quad t_7 = 112 \text{ мин}, \quad t_8 = 108 \text{ мин}, \\
t_{\text{общ.}} = 640 \text{ мин}
\end{gathered} \tag{17}
$$

Половина времени составляет 320 мин, а первые три участка в сумме дают 240 мин. Тогда от четвертого участка следует отрезать часть с площадью 80 мин, то есть взять его целиком. Для этого нужно провести прямую, проходящую через отметку 24 км.

А это значит, что за первую половину времени тренировки Гриша преодолел 24 километра.

Ответ: Гриша преодолел 24 км.

№	Критерий	Баллы
1	Указан способ нахождения времени по значению темпа и перемещения	2
2	Верно вычислено время одного из участков	3
3	Найдено на каком из участков расположена середина тренировки по времени	3
4	Получен верный ответ	2
Сумма		10