Городская открытая олимпиада школьников по физике 2021/22 г.

Решения см. на сайте www.physolymp.spb.ru

11 класс — Заключительный тур, теоретический этап

1 ν молей идеального газа участвуют в процессе, в ходе которого совершённая газом работа зависит от его текущего объёма V следующим образом:

$$A(V) = \nu R T_0 \left[\frac{V - V_1}{V_1} + \frac{V_1^2 - V^2}{V_2^2} \right],$$

где параметры T_0, V_1 и V_2 известны. При этом объём газа монотонно возрастает от V_1 до V_2. Найдите максимальную температуру газа в таком процессе.

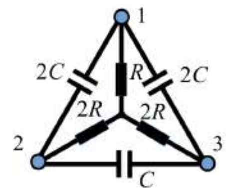
2 Подойдя к пропасти, исследователь решил измерить её ширину. У него имеется массивная катушка, к которой прикреплён один конец лёгкой ленты. Исследователь намотал ленту на катушку и, держа в руке свободный конец ленты, бросил катушку через пропасть под углом α к горизонту. При этом за счёт натяжения ленты катушка кроме поступательной скорости приобрела и некоторое вращение.

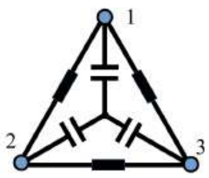
Катушка упала в точности на противоположном краю пропасти и в момент удара о землю мгновенно остановилась и прекратила вращаться. Исследователь осторожно вытянул провисающий кусок ленты, при этом катушка оставалась неподвижной. Оказалось, что кусок ленты, вытянутый исследователем, имеет длину ΔL. Определите ширину пропасти.

Считайте, что точка старта и финиша летящей катушки лежат на одной высоте. Катушка вращается без трения, не меняя в полёте направления оси вращения. Лента лёгкая и гибкая. Сопротивлением воздуха пренебречь.

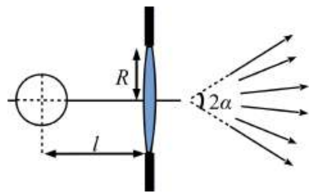
3 Схема, изображённая на левом рисунке, состоит из трёх известных сопротивлений, трёх известных емкостей и имеет три контакта (1, 2, 3), при помощи которых подключается к цепям постоянного или переменного тока.

Требуется заменить её на эквивалентную схему, изображённую на правом рисунке. Подберите в ней сопротивления и ёмкости, так чтобы при любом подключении данные схемы оказывали одинаковое влияние на то, к чему их подключили.

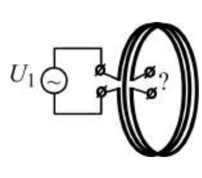




4 В непрозрачном экране сделали круглое отверстие радиусом R. В него вставили тонкую собирающую линзу с известным фокусным расстоянием F. На оптической оси линзы на расстоянии l от её центра расположен центр светящегося шара (см. рисунок, $l > F$, шар не пересекает фокальную плоскость линзы). Оказалось, что с другой стороны экрана на некотором удалении от линзы испускаемые шаром лучи заполняют конус с углом раствора 2α. Найдите радиус светящегося шара. Считайте, что радиус шара меньше R.



5 Три одинаковых разомкнутых кольца изготовлены из проволоки, покрытой изоляцией. Электрическое сопротивление каждого кольца R, индуктивность L. Три кольца сложили вместе, так что расстояние между проволоками пренебрежимо мало. К первому кольцу подключили переменное напряжение с амплитудой U_1 и частотой ν. Второе кольцо закоротили, третье оставили разомкнутым. Найдите амплитуду колебаний напряжения на третьем кольце.



ОСТАВЬТЕ УСЛОВИЯ СЕБЕ!

Городской тур 2020/21. 11 класс

Задача 1.

По условию задачи $V_1 < V_2$.

Если объём изменился на малую величину dV, работа, совершённая газом при этом составит $dA = PdV$, где P – давление в этот момент (предполагаем, что dV настолько мало, что в ходе такого расширения давление газа также меняется незначительно).

Зависимость $A(V)$ нам известна:

$$A(V) = \nu RT_0 \left[\frac{V - V_1}{V_1} + \frac{V_1^2 - V^2}{V_2^2}\right],$$

отсюда в каждый момент времени $P = dA/dV$ – давление определяется производной функции A(V). Отсюда

$$P(V) = \nu RT_0 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{2V}{V_2^2}\right).$$

Заметим, что это выражение положительно на интересующем промежутке (от V_1 до V_2), если

$$V_2 > 2V_1 \qquad (*).$$

Только в этом случае условие задачи осмысленно (область определения параметров в условии). Это же совпадает с условием, что работа $A(V)$, совершающаяся при расширении газа от V_1 до V_2 положительна.

Умножая давление на V получим:

$$PV = \nu RT_0 \left(\frac{V}{V_1} - \frac{2V^2}{V_2^2}\right).$$

С другой стороны это равно νRT, где T – текущая температура при каждом значении объёма. Отсюда находим температуру как функцию объёма:

$$T(V) = \frac{PV}{\nu R} = T_0 \left(\frac{V}{V_1} - \frac{2V^2}{V_2^2}\right).$$

Это квадратичная зависимость, график которой представляет собой параболу с "ветвями" вниз, вершина которой соответствует максимуму функции. Максимум реализуется при $V_{extr} = V_2^2/(4V_1)$ и соответствует температуре

$$T_{max} = T_0 \frac{V_2^2}{8V_1^2}$$

Земетим, что абсолютная температура также должна быть положительна на всём интервале изменения объёма, однако условие положительности давления мы уже использовали, а значит величина $PV/(\nu R)$ окажется положительной автоматически.

Такое решение для T_{max} реализуется, если вершина параболы V_{extr} попадает в интервал, в котором изменяется давление газа:

$$V_1 \le \frac{V_2^2}{4V_1} \le V_2.$$

Первое неравенство здесь выполняется автоматически, если справедливо соотношение $(*)$. А вот соотношение $V_{extr} \le V_2$ может и не выполняться. Оно не выполняется, если $V_2 > 4V_1$, что совместимо с областью определения параметров V_1 и V_2.

При этом вершина параболы не попадает в интервал (V_1, V_2), оказываясь справа от него. Тогда максимум температуры $T(V)$ реализуется при $V = V_2$.

Ответ: Условие задачи имеет смысл, если $V_2 > 2V_1$.

Если к тому же $V_2 \le 4V_1$ максимальная температура равна $T_{min} = T_0 V_2^2/(8V_1^2)$. При $V_2 > 4V_1$ максимальная температура равна $T_0(V_2/V_1 - 2)$.

Задача 2. Обозначим начальную скорость катушки в полёте V_0. С такой же скоростью лента сматывается с катушки в момент броска. Такая скорость сматывания ленты устанавливается за счёт натяжения ленты, которая раскручивает катушку.

Сначала забудем о влиянии ленты на катушку в полёте и рассмотрим свободно летящую катушку. В ходе её полёта горизонтальная скорость поступательного движения катушки будет оставаться постоянной $V_0 \cos\alpha$, а вертикальная скорость будет сначала уменьшаться, а потом увеличиваться, однако не превысит начальное значение $V_0 \sin\alpha$ в момент броска.

Таким образом, свободно летящая катушка до момента удара о землю всегда двигается со скоростью, меньшей, чем V_0. Однако, это означает, что кроме начального момента лента больше не натянется – ведь скорость её сматывания с катушки всегда больше, чем скорость движения катушки.

Поэтому катушка свободно летит по параболе и оказывается в момент падения T на расстоянии $L = V_0 T \cos\alpha$ от исследователя. Это и есть ширина пропасти, которую надо найти. За время полёта T с катушки размотрается кусок ленты длиной $x = V_0 T$, так как скорость разматывания определяется в момент броска и больше не меняется.

Значит исследователь вытащит провисающий кусок длиной

$$\Delta L = x - L = V_0 T - V_0 T \cos\alpha = V_0 T(1 - \cos\alpha).$$

Отсюда найдём $V_0 T = \Delta L/(1 - \cos\alpha)$.

Подставляя это значение в выражение для L, получаем ответ.

<u>Ответ</u>: $L = \Delta L \cos\alpha/(1 - \cos\alpha)$.

Задача 3. Рассмотрим схему, которая дана по условию (см. рис. 1)

Поскольку эквивалентная схема должна работать при любом подключении, сначала рассмотрим случай, когда её включают в цепь постоянного тока. При таком подключении электрический ток течёт только через активные сопротивления, а конденсаторы заряжаются, но постоянный ток по ним течь не может. Поэтому достаточно нарисовать эквивалентную схему, игнорируя ёмкости.

Обозначим эквивалентные сопротивления как показано на рис. 2. Сопротивления на боковых сторонах треугольника должны быть одинаковы из-за вертикальной симметрии исходной схемы – очевидно, такой же симметрией должна обладать и эквивалентная схема.

В исходной схеме сопротивление между контактами 1 и 2 равно $3R$. В эквивалентной схеме сопротивление между 1 и 2 равно $(\alpha + \beta)\alpha R/(2\alpha + \beta)$. Приравнивая эти величины, получаем уравнение.

Второе уравнение получается аналогичным рассмотрением пары контактов 2 и 3. Пару контактов 1 и 3 можно не рассматривать, из симметрии треугольника эта пара приведёт к такому же уравнению, как пара 1 и 2.

Таким образом несложно получить систему уравнений:

$$3R = \frac{(\alpha + \beta)\alpha R}{2\alpha + \beta}, \qquad 4R = \frac{2\alpha\beta R}{2\alpha + \beta}.$$

Система легко решается (например, можно разделить одно уравнение на второе, откуда сразу получается $\beta = 2\alpha$). Окончательно $\alpha = 4$, $\beta = 8$.

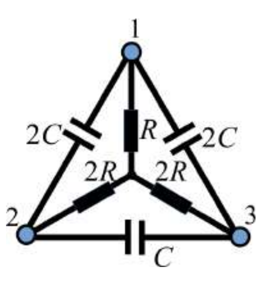


Рис. 1:

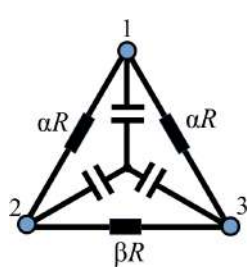


Рис. 2:

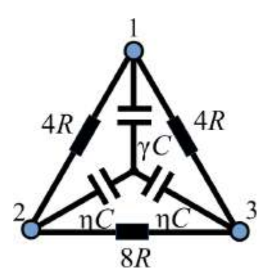


Рис. 3:

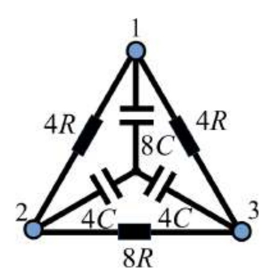


Рис. 4:

Теперь разберёмся с подключением схем в цепь переменного тока. Если на контакты подаётся переменное напряжение, конденсаторы то заряжаются, то разряжаются, то есть по ним течёт переменный ток. Также ток будет течь и по активным сопротивлениям, которые, впрочем, уже известны.

Поступим аналогично – запишем условие того, что ёмкости между контактами 1 и 2 в исходной и эквивалентной схеме совпадают. Также поступим для пары контактов 2 и 3. Значения емкостей в эквивалентной схеме обозначим, как показано на рис. 3. Получим уравнения:

$$\left(\frac{2}{3}+2\right)C = \frac{\gamma\eta}{\gamma+\eta}C, \qquad 2C = \frac{\eta C}{2},$$

которые легко разрешить, $\gamma = 8$, $\eta = 4$.

Так как у построенных схем одинаковое активное и реактивное сопротивления между каждой парой контактов, они будут вести себя эквивалентно в цепях переменного и постоянного тока.

Ответ: Решение представлено на рис. 4.

Задача 4. Любой луч, проходящий через линзу, был испущен какой-то точкой поверхности шара. Поскольку задача имеет ось симметрии – главную оптическую ось линзы, все построения мы будем проводить в плоскости рисунка.

Проведем касательные AK и A′K′ из краёв линзы к шару. Очевидно, только свет, испущенный точками дуги ABA′ попадёт на линзу (см. рис. 5).

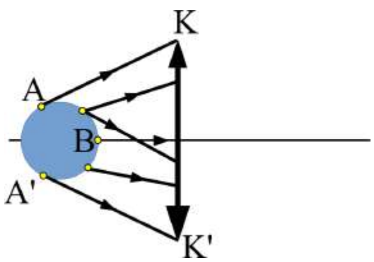


Рис. 5:

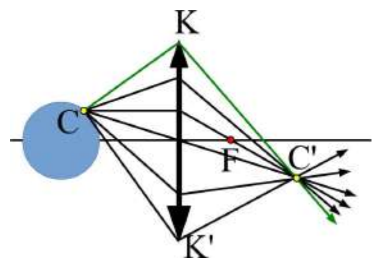


Рис. 6:

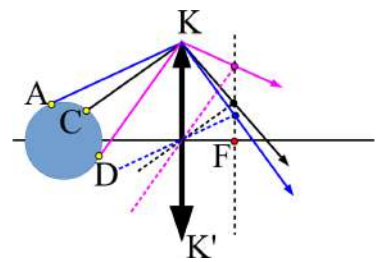


Рис. 7:

Конус образуют лучи, которые максимально отклоняются от главной оптической оси после прохождения линзы.

Решение, первый способ.

Выберем произвольную точку C на дуге AB. За линзой все выходящие из C лучи попадут в изображение точки C – точку C′ (см. рис. 6). Из построения видно: сильнее всего за линзой отклоняется от главной оптической оси луч CK (выделен зелёным).

Теперь рассмотрим лучи, которые попадают на край линзы K с разных точек поверхности шара – точек A, C, D (см. рис. 7, для наглядности мы изобразили лучи AK, CK, DK разными цветами). Чтобы построить ход этих лучей за линзой, требуется для каждого из этих лучей построить «побочный» фокус в фокальной плоскости – точку, куда линза собирает все лучи, параллельные рассматриваемому. Проще всего построить побочный фокус, пользуясь тем, что лучи, проходящие через центр линзы, не преломляются. Соответствующие построения выполнены соответствующими цветами.

Из построений видно, что за линзой под наибольшим углом к главной оптической оси идёт луч, попадающий в K под наименьшим углом к главной оптической оси, то есть луч AK, выделенный синим.

Таким образом, образующую конуса обеспечивает луч AK после того как преломится в линзе.

Рассмотрим внимательно луч AK (см. рис. 8). Обозначим угол между ним и главной оптической осью φ (отмечен красным). Мы доказали, что за линзой этот луч идёт под углом α, который известен по условию.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника, отмеченных на рисунке голубым. У каждого из них есть горизонтальный катет длиной F, угол в одном из этих треугольников α, в другом φ. Как видно из рисунка, сумма двух вертикальных катетов этих треугольников равна радиусу линзы, поэтому

$$R = F\,\mathrm{tg}\,\alpha + F\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{R}{F} - \mathrm{tg}\,\alpha. \tag{1}$$

Итак, мы знаем φ.

Продолжим рассматривать ход луча AK – на этот раз левее линзы. Рассмотрим теперь два прямоугольных треугольника – зелёный и оранжевый (см. рис. 9), которые имеют общую вершину – точку A. Сумма вертикальных катетов этих двух треугольников также равна R – это условие поможет нам найти ответ.

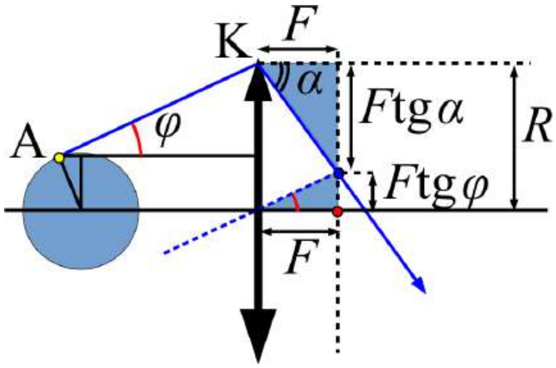


Рис. 8:

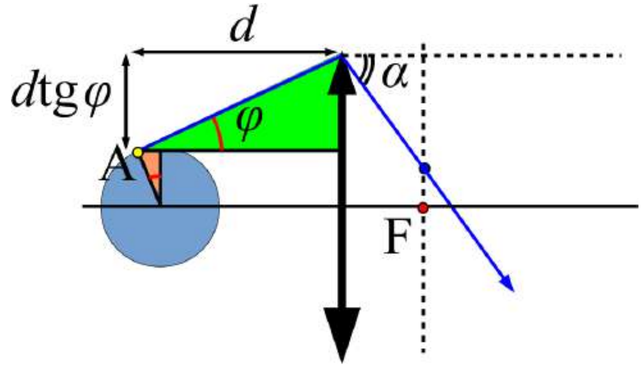


Рис. 9:

Оранжевый треугольник имеет гипотенузу r – это искомый радиус шара. Угол между гипотенузой и вертикальным катетом в нём равен φ, ведь гипотенуза перпендикулярна рассматриваемому лучу AK. Поэтому вертикальный катет оранжевого треугольника равен $r\cos\varphi$.

Горизонтальный катет зелёного треугольника представляет собой сумму $d = l + r\sin\varphi$, где l – известное по условию расстояние от центра шара до центра линзы, а $r\sin\varphi$ – горизонтальный катет оранжевого треугольника. Значит, вертикальный катет зелёного треугольника равен $d\,\mathrm{tg}\,\varphi = (l + r\sin\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Складывая вертикальные катеты зелёного и оранжевого треугольников, запишем уравнение, которое позволит найти r,

$$R = r\cos\varphi + (l + r\sin\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Выразим отсюда r:

$$r = \frac{R - l\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi + \cos\varphi} = (R - l\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi \qquad (2)$$

Наконец, используя тригонометрическое тождество

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi}$$

и формулу (1) для найденного $\mathrm{tg}\,\varphi$, находим из (2) ответ

$$r = \frac{R - l(R/F - \mathrm{tg}\,\alpha)}{\sqrt{1 + (R/F - \mathrm{tg}\,\alpha)^2}}.$$

Решение, второй способ.

Обозначим искомый радиус сферы r. Рассмотрим произвольную точку сферы C, находящуюся на высоте h и расстоянии d от центра линзы (см. рис. 10).

Пусть некоторый луч выходит из неё и попадает на линзу на высоте H. За линзой этот луч попадает в изображение точки C, которое мы обозначили C$'$, считая, что оно находится ниже главной оптической оси на h' и на расстоянии f от центра линзы. Угол, под которым идёт этот луч перед линзой, обозначим ϕ, а за линзой γ.

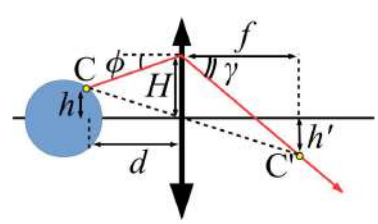


Рис. 10:

Тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \qquad \frac{h}{d} = \frac{h'}{f}.$$

Для углов же ϕ и γ справедливо

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{H - h}{d}, \qquad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{H + h'}{f}. \qquad (3)$$

Отсюда можно получить

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{H}{F} - \operatorname{tg}\phi. \tag{4}$$

Отсюда видно, что для увеличения угла γ выгодно увеличивать H и уменьшать ϕ. Таким образом, приходим к выводу, что луч АК (введённый в решении первым способом), преломившись в линзе, будет иметь наибольший наклон α к главной оптической оси.

Итак, для луча АК следует положить $H = R$, $\gamma = \alpha$. Это позволяет найти угол φ между АК и главной оптической осью из (4) – ведь для луча АК $\varphi = \phi$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{F} - \operatorname{tg}\alpha.$$

Осталось подставить в первое из соотношений (3) $H = R$, $h = r\cos\varphi$, $d = l + r\sin\varphi$, как мы сделали, решая задачу первым способом, а также найденный угол φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R - r\cos\varphi}{l + r\sin\varphi}, \text{ где } \operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{F} - \operatorname{tg}\alpha$$

и выразить r.

Ответ: $r = [R - l(R/F - \operatorname{tg}\alpha)]/[\sqrt{1 + (R/F - \operatorname{tg}\alpha)^2}]$.

Задача 5. Так как кольца расположены на пренебрежимо малом расстоянии, магнитный поток Φ, который их пронизывает, один и тот же.

Сообразим, что по первому и второму кольцу потечёт переменный ток, ведь именно эти кольца оказываются включёнными в замкнутую схему. Первое кольцо замыкают с помощью источника с напряжением $U_1\cos(\omega t)$ – ток этого кольца обозначим $I_1(t)$. Здесь $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота гармонических колебаний напряжения.

Отметим, что начало отсчёта времени в задаче не указано, то есть добавление произвольной фазы к напряжению источника (например, $U_1\cos(\omega t + \phi)$) не влияет на решение задачи, в этом смысле выбрать напряжение в форме $U_1\sin(\omega t) = U_1\cos(\omega t - \pi/2)$ ничем не хуже.

Второе кольцо также замкнуто по условию задачи, ток через него обозначим $I_2(t)$. Третье кольцо оставили разомкнутым, следовательно, ток через него не потечёт.

Для определённости будем считать, что $I_1(t)$ и $I_2(t)$ положительны, если направлены в одну сторону. Тогда суммарный магнитный поток, который они производят, равен $\Phi = L(I_1 + I_2)$. Третье кольцо не производит магнитный поток, так как по нему не протекает ток.

Так как магнитный поток во всех кольцах один и тот же, во всех трех кольцах будет возникать Э.Д.С. индукции, численно равная

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L(\dot{I}_1 + \dot{I}_2), \tag{5}$$

здесь для краткости точками обозначается производная токов по времени.

Запишем закон Ома для первого кольца:

$$U_1\cos(\omega t) + \mathcal{E}_{\text{инд}} = I_1 R$$

Здесь слева стоят вклады, которые вызывают ток в контуре – напряжение подключенного источника и Э.Д.С. индукции, а справа – как контур «отзывается» на такое влияние. Для второго кольца закон Ома отличается тем, что лишь Э.Д.С. индукции является физической причиной появления тока в цепи, никаких внешних источников питания ко второму кольцу не подключено:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = I_2 R.$$

Закон Ома для третьего кольца выглядит тривиально: напряжение, которое зафиксирует в нём вольтметр, в точности совпадает с Э.Д.С. индукции.

Так как по условию задачи требуется выяснить напряжение в третьем кольце, очевидно, фактически требуется узнать амплитуту колебаний величины $\mathcal{E}_{\text{инд}}$. Согласно (5) для этого достаточно найти сумму токов $I = I_1 + I_2$, продифференцировать её по времени и умножить на L.

Перепишем закон Ома для первых двух колец с учётом (5):

$$U_1\cos(\omega t) - L(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = I_1 R, \qquad -L(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = I_2 R.$$

Сложив эти уравнения, получаем одно уравнение, в которое входит сумма токов:

$$U_1 \cos(\omega t) - 2L\dot{I} = IR. \tag{6}$$

Найдём, как суммарный ток зависит от времени. Так как поданное напряжение периодическое, это вынужденные электрические колебания, и решение следует искать в виде периодической зависимости на той же частоте:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) = I_0[\cos(\omega t)\cos\varphi + \sin(\omega t)\sin\varphi],$$

в последнем равенстве мы просто воспользовались тригонометрическим тождеством для косинуса суммы. Здесь I_0 – пока неизвестная амплитуда колебаний суммарного тока, а также неизвестная величина φ – параметр, который учитывает, что колебания тока и напряжения в цепи не обязаны быть синфазными; φ показывает **разницу фазы** – на какую долю периода максимальное значение $I(t)$ «отстаёт» от максимального значения напряжения в первом кольце.

Отметим, что на решение задачи не повлияло бы, если бы мы выбрали ток в форме $I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ – это просто соответствовало бы переопределению величины φ

Зависимость $I(t)$ несложно продифференцировать:

$$\dot{I} = I_0\omega[-\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi].$$

Подставляя выбранную форму $I(t)$ и соответствующее выражение $\dot{I}$ в (6), получим

$$U_1 \cos(\omega t) - 2LI_0\omega[-\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi] = RI_0[\cos(\omega t)\cos\varphi + \sin(\omega t)\sin\varphi].$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени, значит косинусы $\cos(\omega t)$ в нём должны сокращаться с косинусами, а синусы $\sin(\omega t)$ с синусами:

$$U_1 \cos(\omega t) - 2LI_0\omega \cos(\omega t)\sin\varphi = RI_0 \cos(\omega t)\cos\varphi,$$

$$2LI_0\omega \sin(\omega t)\cos\varphi = RI_0 \sin(\omega t)\sin\varphi.$$

Из второго равенства сразу вычисляется $\operatorname{tg}\varphi = 2L\omega/R$. Первое легко преобразовать к виду

$$U_1 - 2LI_0\omega\sin\varphi = RI_0\cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad U_1 = I_0(R\cos\varphi + 2L\omega\sin\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = \frac{U_1}{R\cos\varphi + 2L\omega\sin\varphi}.$$

Для получения амплитуды I_0 осталось лишь учесть, что найденному значению тангенса угла φ соответствуют

$$\sin\varphi = \frac{2L\omega}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}},$$

что немедленно даёт, что сумма токов $I_1 + I_2 = I_0\cos(\omega t + \varphi)$ колеблется с амплитудой

$$I_0 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}},$$

Теперь по формуле (5) найдём амплитуду Э.Д.С. индукции $LI_0\omega$.

Ответ: В третьем контуре амплитуда напряжения составит

$$\frac{L\omega U_1}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega^2}}, \qquad \omega = 2\pi\nu.$$