10 класс — Заключительный тур, теоретический этап

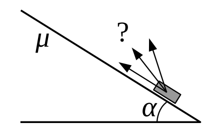
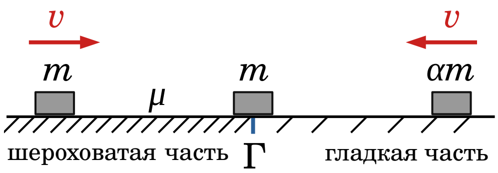
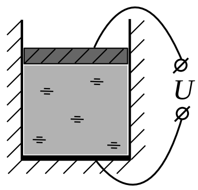
1	Ракета с выключенным двигателем движется со скоростью V вокруг планеты по круговой орбите радиуса R_0. Какой радиус может иметь круговая орбита, по которой ракета будет двигаться с прежней скоростью и включенным двигателем постоянной тяги F? Массу ракеты m считайте постоянной. Атмосферой пренебречь.
2	Небольшой камушек можно запустить вверх вдоль наклонной плоскости так, что он будет скользить по ее поверхности до полной остановки, либо из той же точки бросить под произвольным углом. Во втором случае камушек остановится, когда коснется поверхности. Начальные скорости одинаковые. Как нужно поступить, чтобы камушек сместился на максимальное расстояние вдоль плоскости? Коэффициент трения камушка о плоскость μ, угол наклона плоскости α. Сопротивлением воздуха пренебречь. 
3	Три маленькие шайбы массами m, m и αm лежат на горизонтальном столе на одной прямой на расстоянии L друг от друга (см. рис.). Средняя шайба расположена в точности на границе Г, разделяющей шероховатую (слева) и гладкую (справа) части стола. Боковым шайбам одновременно сообщают скорость v в направлении средней шайбы. Экспериментатор измерял конечную скорость правой шайбы u как функцию v. График полученной зависимости без соблюдения масштаба схематически представлен ниже. Используя значение v_*, определите α. Коэффициент трения шайб о шероховатую часть стола μ. Ускорение свободного падения g. Все столкновения абсолютно упругие и центральные, шайбы не вращаются. Размером шайб пренебречь. Известно, что $\alpha < 1$. 
4	В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем находится проводящая жидкость (см. рис.). Поршень и дно сосуда представляют собой проводящие контакты, к которым приложено постоянное напряжение U. В результате нагрева жидкость расширяется по закону $V(T) = V_0[1 + \alpha(T - T_0)]$. Определите время, за которое объем жидкости изменится на 10%. Начальная температура жидкости T_0, масса m. Удельную теплоемкость c и удельное сопротивление ρ считайте известными и постоянными. Площадь сечения сосуда S. Поршень свободно скользит без трения. Теплоемкостью сосуда пренебречь. 
5	В непрозрачном экране сделали круглое отверстие радиусом R. В него вставили тонкую собирающую линзу с известным фокусным расстоянием F. На оптической оси линзы на расстоянии l от её центра расположен центр светящегося шара (см. рисунок, $l > F$, шар не пересекает фокальную плоскость линзы). Оказалось, что с другой стороны экрана на некотором удалении от линзы испускаемые шаром лучи заполняют конус с углом раствора 2α. Найдите радиус светящегося шара. Считайте, что радиус шара меньше R.

Рис. к задаче 3:

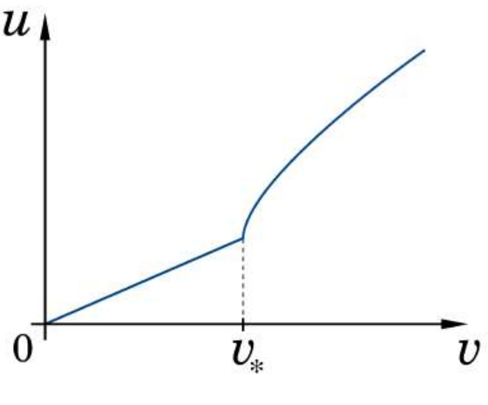
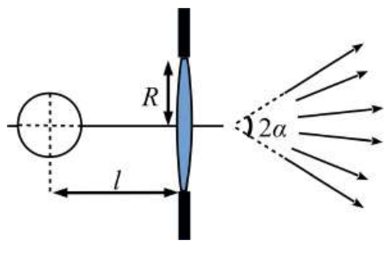


Рис. к задаче 5:



ОСТАВЬТЕ УСЛОВИЯ СЕБЕ!

Городской тур 2021/22. 10 класс

Задача 1.

При выключенном двигателе на ракету действует лишь гравитационное притяжение планеты. Второй закон Ньютона при движении по окружности радиусом R_0 с постоянной по модулю скоростью V принимает вид

$$mV^2/R_0 = GmM/R_0^2\,, \tag{1}$$

где M — масса планеты, G — гравитационная постоянная.

При включенном двигателе орбита должна остаться окружностью, и скорость не должна измениться. Из этого заключаем, что сила тяги двигателя f должна быть направлена вдоль линии соединяющей ракету и центр планеты. При этом она может быть направлена к планете (пусть при этом $f = F$) или от нее ($f = -F$). В таком случае второй закон Ньютона перепишется в виде

$$mV^2/R = GmM/R^2 + f\,, \tag{2}$$

где R — новый радиус орбиты. Подставляя сюда найденное из (1) произведение GM и домножая (2) на R^2, получаем квадратное уравнение на R. Его решения равны

$$R = \frac{mV^2}{2f}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4R_0 f}{mV^2}}\right)\,. \tag{3}$$

Если тяга направлена к планете ($f = F$), то оба решения возможны при условии, что $F \le mV^2/(4R_0)$ (в противном случае ракета упадет на планету).

Если тяга направлена от планеты ($f = -F$), то решение со знаком «+» нужно выкинуть, т.к. $R > 0$. Ограничений на величину силы F при этом нет.

<u>Ответ</u>: возможные радиусы: $R = R_0(1 - \sqrt{1+4x})/(-2x)$, если сила тяги направлена от планеты, либо $R = R_0(1 \pm \sqrt{1-4x})/(2x)$, если сила тяги направлена к планете, где $x = FR_0/(mV^2)$. (10 баллов)

Задача 2.

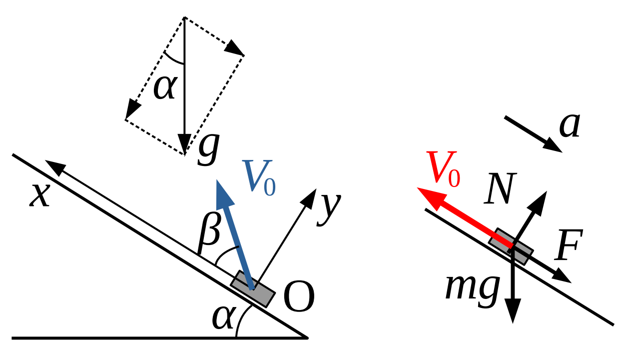


Рис. 1:

Направим оси координат так, как показано на левой части Рис. 1, начало отсчета O поместим в точку, из которой запускают камушек. Начальную скорость камушка обозначим V_0, ускорение свободного падения g, массу камушка m.

Сперва определим, на какое расстояние сместится камушек, если бросить его под углом β к плоскости. Закон движения камушка в проекции на выбранные оси имеет вид:

$$x(t) = V_0 \cos\beta t - \frac{g\sin\alpha}{2}t^2\,, \tag{4}$$

$$y(t) = V_0 \sin\beta t - \frac{g\cos\alpha}{2}t^2\,. \tag{5}$$

Время полета T определим из условия обращения в нуль координаты y:

$$y(T) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad T = \frac{2V_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}\,. \tag{6}$$

По условию, при броске дальность определяется местом падения. В момент касания наклонной плоскости камушек окажется на расстоянии

$$L(\beta) = x(T) = \frac{2V_0^2}{g\cos^2\alpha}\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \frac{V_0^2}{g\cos^2\alpha}\big[\sin(\alpha+2\beta) - \sin\alpha\big]\,. \tag{7}$$

от места броска. Из последнего равенства в (7) очевидно, что смещение максимально, если $\alpha + 2\beta = \pi/2$. При этом смещение равно

$$S_1 = L(\pi/4 - \alpha/2) = \frac{V_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}\,. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь процесс скольжения камушка вдоль поверхности (см. правую часть Рис. 1). На камушек действуют сила реакции опоры N, сила тяжести mg и сила трения $F = \mu N$. Второй закон Ньютона для камушка в проекции на выбранные оси имеет вид

$$-mg\sin\alpha - F = -ma\,, \tag{9}$$
$$N - mg\cos\alpha = 0\,. \tag{10}$$

Следовательно ускорение камня равно

$$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \tag{11}$$

Двигаясь с начальной скоростью V_0, до остановки камушек успеет сместиться вдоль плоскости на расстояние

$$S_2 = \frac{V_0^2}{2a} = \frac{V_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}\,. \tag{12}$$

Сравним перемещения S_1 и S_2:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2(\mu + \operatorname{tg}\alpha)(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha}\,. \tag{13}$$

Если отношение $S_1/S_2 > 1$, то более “выгодным” является бросить камень под углом $\pi/4 - \alpha/2$, при этом он сместится вдоль нее на расстояние S_1. Напротив, если $S_1/S_2 < 1$, то нужно запускать камушек вдоль плоскости, в результате он преодолеет расстояние S_2.

Ответ: если величина (13) больше единицы, то необходимо бросать камушек под углом $\pi/4 - \alpha/2$ к плоскости; в противном случае следует запускать его вдоль плоскости. (10 баллов)

Задача 3.

Поскольку на левую шайбу действует сила трения, первое соударение произойдет с участием средней и правой шайб. Вычислим скорость u_0, с которой будет двигаться правая шайба после удара. Для этого требуется записать закон сохранения энергии и закон сохранения импульса. Пусть средняя шайба после соударения двигается со скоростью w. Будем считать, что положительные значения u_0 и w отвечают движению правой шайбы вправо, а средней — влево. Тогда уравнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{\alpha m v^2}{2} = \frac{\alpha m u_0^2}{2} + \frac{m w^2}{2}\,, \tag{14}$$
$$-\alpha m v = \alpha m u_0 - m w\,. \tag{15}$$

Отсюда находим

$$u_0 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,v\,. \tag{16}$$

Если $\alpha = 1$, то правая шайба остановится. При $\alpha > 1$ правая шайба будет продолжать движение налево, но с меньшей скоростью. По условию задачи известно, что $\alpha < 1$, однако это можно показать, используя график зависимости $u(v)$. Рассмотрим малые значения скорости v, при которых левая шайба останавливается, не доезжая до границы шероховатой и гладкой частей стола. Очевидно, что в этом случае при $\alpha \geqslant 1$ правая шайба тоже в конечном итоге остановится. Это означает, что зависимость u от v будет иметь нулевые значения в некоторой конечной окрестности $v = 0$. Поскольку график в условии задачи имеет линейный рост сразу при $v > 0$, можно заключить, что $\alpha < 1$ и правая шайба в результате первого соударения начинает движение вправо ($u_0 > 0$).

При достаточно малых v левая и средняя шайбы остановятся на шероховатой поверхности стола, так что конечная скорость правой шайбы будет определяться выражением (16), которое является линейной функцией v. Разберемся, с чем связаны излом графика и дальнейшее нелинейное поведение функции $u(v)$. Скорость правой шайбы может измениться второй раз лишь в том случае, если произойдет еще одно соударение со средней шайбой. Для этого требуется, чтобы средняя шайба догнала правую, т. е. при переходе на гладкую часть стола имела бо́льшую скорость, чем u_0. Обозначим эту скорость за v_0. Заметим сначала, что при столкновении левой и средней шайб они просто меняются скоростями, так что кинетическая энергия средней шайбы при переходе на гладкую поверхность будет равна разности исходной кинетической энергии левой шайбы и потерь энергии, связанных с трением:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \mu mgL\,. \tag{17}$$

Таким образом, получаем $v_0 = \sqrt{v^2 - 2\mu gL}$. Теперь требуется сравнить эту скорость с выражением (16) для u_0. Нетрудно показать, что v_0 действительно превосходит u_0 при $v > v_*$, где пограничное значение v_* дается следующим выражением:

$$v_* = \frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\,\sqrt{2\mu gL}\,. \tag{18}$$

Заметим, что при $v > v_*$ подкоренное выражение в формуле для v_0 положительно. В уравнении (18) единственным неизвестным является параметр α. Введем обозначение $x = \sqrt{\alpha}$. Получаем следующее квадратное уравнение на x:

$$x^2 - 2\beta x + 1 = 0\,, \tag{19}$$

где $\beta \equiv v_*/\sqrt{2\mu gL}$. Корни уравнения имеют вид:

$$x = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}\,. \tag{20}$$

Поскольку $\alpha < 1$, то и $x < 1$. Произведение корней равно 1, что означает, что требуется взять меньший:

$$\alpha = (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})^2\,. \tag{21}$$

В задаче не требовалось находить зависимость $u(v)$ при $v > v_*$, однако можно показать, что она имеет следующий вид:

$$u = \frac{2}{1+\alpha}\,\sqrt{v^2 - 2\mu gL} - \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}\,v\,. \tag{22}$$

Данное выражение отвечает нелинейному поведению, представленному на графике. Можно убедиться в том, что при $v = v_*$ выражение (22) переходит в (16).

В заключение заметим, что значение α можно получить, не решая квадратное уравнение. Для этого достаточно приравнять скорости u_0 и v_0, заменив v на v_*:

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,v_* = \sqrt{v_*^2 - 2\mu gL} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta}\,. \tag{23}$$

Решая это уравнение, получаем выражение (21).

<u>Ответ</u>: $\alpha = (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})^2$, где $\beta = v_*/\sqrt{2\mu gL}$.(10 баллов)

Задача 4.

При протекании через жидкость постоянного тока выделяется джоулево тепло, которое приводит к ее нагреву и расширению. Найдем температуру $T_к$, при нагреве до которой объем жидкости увеличивается на 10%:

$$1.1V_0 = V_0[1 + \alpha(T_к - T_0)] \qquad \Leftrightarrow \qquad T_к = T_0 + \frac{0.1}{\alpha}\,. \tag{24}$$

Интервал изменения температуры $[T_0, T_к]$ разобьем на большое количество N одинаковых отрезков величиной $\Delta T = (T_к - T_0)/N$. Рассмотрим i-й отрезок. На этом отрезке температура жидкости изменяется в пределах $T_0 + (i-1)\Delta T \leqslant T \leqslant T_0 + i\Delta T$. Высота столба жидкости при температуре T равна

$$h(T) = \frac{V(T)}{S} = \frac{V_0}{S}[1 + \alpha(T - T_0)]\,. \tag{25}$$

Рассматривая жидкость как резистор длины h и сечения S, заключаем, что ее электрическое сопротивление при этом составляет

$$R(T) = \frac{\rho h(T)}{S}\,. \tag{26}$$

Пусть время нагрева жидкости в рассматриваемом диапазоне температур составляет Δt_i. Мощность тепловыделения $P(T) = U^2/R(T)$ практически остается постоянной, поэтому за время Δt_i с точностью до величин более высокого порядка малости в цепи выделяется тепло $\Delta Q_i = P(T_i)\Delta t_i$, где T_i — любая точка на исследуемом отрезке. Так как система теплоизолирована, все это тепло идет на нагрев жидкости, то есть $\Delta Q_i = cm\Delta T$. В итоге получаем следующее уравнение

$$\frac{U^2}{R(T)}\Delta t_i = cm\Delta T \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta t_i = \frac{cm\rho V_0}{U^2 S^2}[1 + \alpha(T_i - T_0)]\Delta T\,. \tag{27}$$

Чтобы найти полное время нагрева необходимо просуммировать интервалы времени Δt_i и рассмотреть предел $N \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i = \frac{cm\rho V_0}{U^2 S^2} \sum_{i=1}^{N} \big[1 + \alpha(T_i - T_0)\big]\Delta T\,. \tag{28}$$

В качестве T_i удобно выбрать середины отрезков, то есть $T_i = T_0 + (i-1/2)\Delta T$. В силу линейности, сумма N членов арифметической прогрессии в (28) вообще не будет зависеть от N, и мы сразу получаем, что для изменения объема жидкости на 10% потребуется время

$$t_{нагрев} = 0.105\frac{cm\rho V_0}{U^2 S^2 \alpha}\,. \tag{29}$$

При ином выборе T_i в пределе $N \to \infty$ естественно получится тот же самый результат. Выполненное суммирование геометрически соответствует расчету площади под графиком $R(T)$, так что сразу можно было воспользоваться известными формулами из геометрии.

Ответ: для изменения объема жидкости на 10% потребуется время $0.105 cm\rho V_0/(U^2 S^2 \alpha)$. (10 баллов)

Задача 5.

(Данная задача совпадает с задачей 4 11-го класса.)

Любой луч, проходящий через линзу, был испущен какой-то точкой поверхности шара. Поскольку задача имеет ось симметрии – главную оптическую ось линзы, все построения мы будем проводить в плоскости рисунка.

Проведем касательные AK и A′K′ из краёв линзы к шару. Очевидно, только свет, испущенный точками дуги ABA′ попадёт на линзу (см. рис. 2).

Конус образуют лучи, которые максимально отклоняются от главной оптической оси после прохождения линзы.

Решение, первый способ.

Выберем произвольную точку C на дуге AB. За линзой все выходящие из C лучи попадут в изображение точки C — точку C′ (см. рис. 3). Из построения видно: сильнее всего за линзой отклоняется от главной оптической оси луч CK (выделен зелёным).

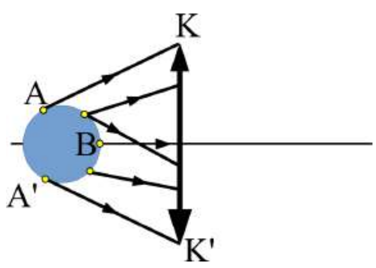


Рис. 2:

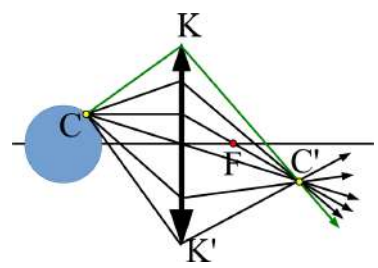


Рис. 3:

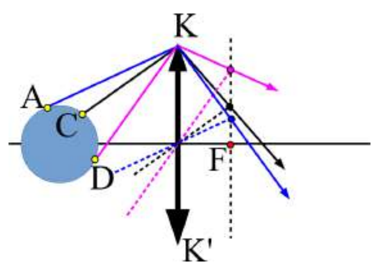


Рис. 4:

Теперь рассмотрим лучи, которые попадают на край линзы K с разных точек поверхности шара — точек A, C, D (см. рис. 4, для наглядности мы изобразили лучи AK, CK, DK разными цветами). Чтобы построить ход этих лучей за линзой, требуется для каждого из этих лучей построить «побочный» фокус в фокальной плоскости - точку, куда линза собирает все лучи, параллельные рассматриваемому. Проще всего построить побочный фокус, пользуясь тем, что лучи, проходящие через центр линзы, не преломляются. Соответствующие построения выполнены соответствующими цветами.

Из построений видно, что за линзой под наибольшим углом к главной оптической оси идёт луч, попадающий в K под наименьшим углом к главной оптической оси, то есть луч AK, выделенный синим.

Таким образом, образующую конуса обеспечивает луч AK после того как преломится в линзе.

Рассмотрим внимательно луч AK (см. рис. 5). Обозначим угол между ним и главной оптической осью φ (отмечен красным). Мы доказали, что за линзой этот луч идёт под углом α, который известен по условию.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника, отмеченных на рисунке голубым. У каждого из них есть горизонтальный катет длиной F, угол в одном из этих треугольников α, в другом φ. Как видно из рисунка, сумма двух вертикальных катетов этих треугольников равна радиусу линзы, поэтому

$$R = F \operatorname{tg} \alpha + F \operatorname{tg} \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{F} - \operatorname{tg} \alpha \,. \tag{30}$$

Итак, мы знаем φ.

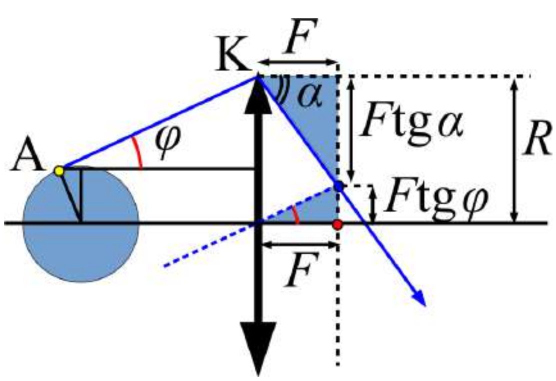


Рис. 5:

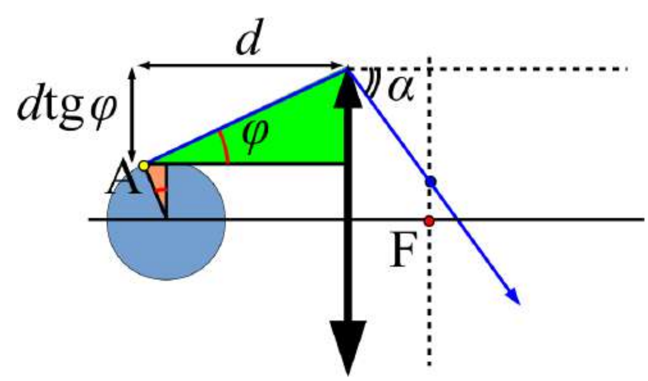


Рис. 6:

Продолжим рассматривать ход луча AK — на этот раз левее линзы. Рассмотрим теперь два прямоугольных треугольника — зелёный и оранжевый (см. рис. 6), которые имеют общую вершину — точку A. Сумма вертикальных катетов этих двух треугольников также равна R — это условие поможет нам найти ответ.

Оранжевый треугольник имеет гипотенузу r — это искомый радиус шара. Угол между гипотенузой и вертикальным катетом в нём равен φ, ведь гипотенуза перпендикулярна рассматриваемому лучу AK. Поэтому вертикальный катет оранжевого треугольника равен $r \cos \varphi$.

Горизонтальный катет зелёного треугольника представляет собой сумму $d = l + r \sin \varphi$, где l — известное по условию расстояние от центра шара до центра линзы, а $r \sin \varphi$ — горизонтальный катет оранжевого треугольника. Значит, вертикальный катет зелёного треугольника равен $d \operatorname{tg} \varphi = (l + r \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi$.

Складывая вертикальные катеты зелёного и оранжевого треугольников, запишем уравнение, которое позволит найти r:

$$R = r\cos\varphi + (l + r\sin\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi\,.$$

Выразим отсюда r:

$$r = \frac{R - l\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi + \cos\varphi} = (R - l\,\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi \qquad (31)$$

Наконец, используя тригонометрическое тождество

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}$$

и формулу (30) для найденного $\mathrm{tg}\,\varphi$, находим из (31) ответ

$$r = \frac{R - l(R/F - \mathrm{tg}\,\alpha)}{\sqrt{1+(R/F-\mathrm{tg}\,\alpha)^2}}\,.$$

Решение, второй способ.

Обозначим искомый радиус сферы r. Рассмотрим произвольную точку сферы C, находящуюся на высоте h и расстоянии d от центра линзы (см. рис. 7).

Пусть некоторый луч выходит из неё и попадает на линзу на высоте H. За линзой этот луч попадает в изображение точки C, которое мы обозначили C$'$, считая, что оно находится ниже главной оптической оси на h' и на расстоянии f от центра линзы. Угол, под которым идёт этот луч перед линзой, обозначим ϕ, а за линзой — γ.

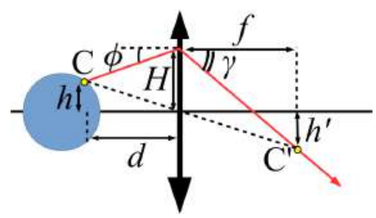


Рис. 7:

Тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad \frac{h}{d}=\frac{h'}{f}\,.$$

Для углов же ϕ и γ справедливо

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{H-h}{d}, \qquad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{H+h'}{f}\,. \qquad (32)$$

Отсюда можно получить

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{H}{F} - \mathrm{tg}\,\phi\,. \qquad (33)$$

Отсюда видно, что для увеличения угла γ выгодно увеличивать H и уменьшать ϕ. Таким образом, приходим к выводу, что луч AK, введенный в первом решении, преломившись в линзе, будет иметь наибольший наклон α к главной оптической оси.

Итак, для луча AK следует положить $H = R$, $\gamma = \alpha$. Это позволяет найти угол φ между AK и главной оптической осью из (33) — ведь для луча AK $\varphi = \phi$:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{R}{F} - \mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Осталось подставить в первое из соотношений (32) $H = R$, $h = r\cos\varphi$, $d = l + r\sin\varphi$, как мы сделали, решая задачу первым способом, а также найденный угол φ,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{R - r\cos\varphi}{l + r\sin\varphi},\ \text{где}\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{R}{F} - \mathrm{tg}\,\alpha,$$

и выразить r.

<u>Ответ</u>: $r = [R - l(R/F - \mathrm{tg}\,\alpha)]/[\sqrt{1+(R/F-\mathrm{tg}\,\alpha)^2}]$. (10 баллов)