10 класс

Задача 10.1. Определение показателя политропы

Политропическим процессом называется процесс, происходящий с неизменным количеством вещества, при условии постоянства теплоемкости C. В частности, к политропическим процессам относятся хорошо известные изопроцессы. Политропический процесс характеризуется показателем политропы n, который может быть найден как $n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$. Давление и объем в политропическом процессе связаны соотношением $PV^n = \text{const}$.

Накачивание газа насосом в сосуд и быстрое выпускание газа из сосуда могут быть в определенном приближении представлены как политропические процессы.

Оборудование: герметичный сосуд с насосом и клапаном, барометр, термометр.

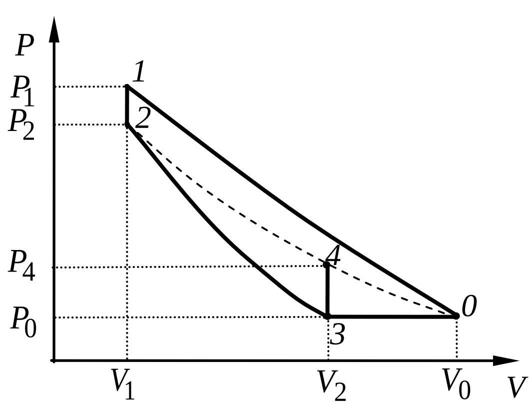
1. Определите экспериментально показатели политропы этих процессов.

2. Найдите молярные теплоемкости этих процессов.

Примечание: при малых x верна приближенная формула $\ln(1 + x) \approx x$.

Решение

Диаграмма исследуемого цикла в координатах (P,V) для постоянного количества вещества ν, содержащегося в баллоне после накачивания, показана на рисунке. В исходном состоянии параметры состояния воздуха следующие: внешнее давление P_0, объем V_0 и комнатная температура T_0 (точка *0* на рис.). Вначале насосом в баллон накачивают воздух до давления $P_1 = P_0 + \Delta P_1$ (точка *1* $(P_1;V_1)$). При сжатии воздух нагревается, поэтому после закрытия крана по прошествии некоторого времени температура воздуха в баллоне сравнивается с температурой окружающей среды (при этом прекращается движение стрелки манометра) и давление воздуха в баллоне становится $P_2 = P_0 + \Delta P_2$.



Затем воздух выпускают через кран К в атмосферу в течение нескольких секунд. Когда стрелка манометра приблизится к нулю, кран закрывают. В этот момент давление воздуха в баллоне становится P_0 (точка $3(P_0;V_2)$). Изменение параметров состояния воздуха в процессе расширения отражает политропа *2–3*.

После закрытия крана охлаждённый при расширении воздух изохорически нагревается до температуры окружающей среды в результате теплообмена с ней. Изменение параметров состояния воздуха отражает линия *3–4*, которая является изохорой. Температура воздуха в баллоне становится равной температуре в точке *2* ($T_4 = T_2 = T_0$), следовательно, точки *2* и *4* лежат на одной изотерме (показана пунктирной линией).

После выравнивания температур давление в баллоне изменится на ΔP_4 и станет $P_4 = P_0 + \Delta P_4$ (точка $(P_4;V_2)$). Таким образом, ΔP_2 и ΔP_4 – это изменения давления на участках *0–2* и *3–4*.

Повторное накачивание воздуха из точки *4* до давления P_1 не возвращает рабочее вещество в состояние точки *1*, поскольку температура воздуха в баллоне после накачивания будет отличаться от температуры T_1 в точке *1* и, следовательно, изменится количество вещества ν. Для точного повтора цикла необходимо открыть кран К на атмосферу и дождаться выравнивания температуры в баллоне с температурой окружающей среды. При этом произойдет возврат системы в точку *0*. После этого цикл измерений можно повторять.

Для процесса накачки:

$$P_0 V_0^n = P_1 V_1^n, \; P_0 V_0 = P_2 V_1,$$

$$V_0 = \frac{P_2}{P_0} V_1$$

$$P_0 \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^n V_1^n = P_1 V_1^n \qquad n \ln\left(\frac{P_2}{P_0}\right) = \ln\frac{P_1}{P_0}$$

$$n = \frac{\ln\frac{P_1}{P_0}}{\ln\left(\frac{P_2}{P_0}\right)} = \frac{\ln\frac{P_0 + \Delta P_1}{P_0}}{\ln\left(\frac{P_0 + \Delta P_2}{P_0}\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta P_1}{P_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\Delta P_2}{P_0}\right)}.$$

Если подставить $PV = \nu RT$ в уравнение политропы $P_0 V_0^n = P_1 V_1^n$ получим $P_0 \frac{T_0{}^n}{P_0{}^n} = P_1 \frac{T_1{}^n}{P_1{}^n}$ или $P_0^{1-n} T_0{}^n = P_1^{1-n} T_1{}^n$ или $T_1 = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1-n}{n}}$. Поскольку температура сосуда изменяется незначительно (почти не ощутимо рукой), изменение давления мало и можно воспользоваться приближенной формулой $\ln(1+x) \approx x$, откуда

$$n_{\text{н}} \approx \frac{\Delta P_1}{\Delta P_2}.$$

Для процесса выпуска воздуха:

$$P_0 V_2^n = P_2 V_1^n,\ P_4 V_2 = P_2 V_1,$$

$$V_2 = \frac{P_2}{P_4} V_1$$

$$P_0 \left(\frac{P_2}{P_4}\right)^n V_1{}^n = P_2 V_1^n \qquad n \ln\left(\frac{P_2}{P_4}\right) = \ln \frac{P_2}{P_0}$$

$$n = \frac{\ln \frac{P_2}{P_0}}{\ln\left(\frac{P_2}{P_4}\right)} = \frac{\ln \frac{P_0 + \Delta P_2}{P_0}}{\ln\left(\frac{P_0 + \Delta P_2}{P_0 + \Delta P_4}\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta P_1}{P_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\Delta P_2}{P_0}\right) - \ln\left(1 + \frac{\Delta P_4}{P_0}\right)}.$$

Поскольку температура сосуда изменяется незначительно (почти не ощутимо рукой), изменение давления мало и можно воспользоваться приближенной формулой $\ln(1+x) \approx x$, откуда

$$n_{\text{в}} \approx \frac{\Delta P_1}{\Delta P_2 - \Delta P_4}.$$

$$C = \frac{nC_V - C_P}{n-1} = \frac{n\frac{5}{2} - \frac{7}{2}}{n-1} R$$

ΔP_1	21	40	60	80	80	80			
ΔP_2	17	35	52	67	70	68			
ΔP_4	4	9	14	18	19	18			

$n_н$	1.235	1.143	1.154	1.194	1.143	1.176	1.174
$n_в$	1.615	1.538	1.579	1.633	1.569	1.6	1.589

$$\bar{n}_н \pm \Delta\bar{n}_н = 1.17 \pm 0.04, \quad \bar{n}_в \pm \Delta\bar{n}_в = 1.59 \pm 0.04 \quad P = 95\,\%$$

$$C_н = -27 \pm 10\,\text{Дж/(моль К)}, \quad C_в = 6.7 \pm 0.9\ \text{Дж/(моль К)}$$

Критерии оценивания

1. Проведены измерения ΔP_1, ΔP_2, ΔP_4 данные сведены в таблицу Если замерены только ΔP_1, ΔP_2	5 и более раз 3 3…4 раза 2 < 3 раз 1.5 ——— 5 и более раз 2 3…4 раза 1.5 < 3 раз 1
2. Выведена формула для $n_н$	1
3. Выведена формула для $n_в$	1
4. По каждому столбцу таблицы определено $n_н$	1
5. По каждому столбцу таблицы определено $n_в$	1
6. Найдено $\bar{n}_н \pm \Delta\bar{n}_н$	1+1
7. Найдено $\bar{n}_в \pm \Delta\bar{n}_в$	1+1
8. Найдено $\bar{C}_н \pm \Delta\bar{C}_н$	1+1
9. Найдено $\bar{C}_в \pm \Delta\bar{C}_в$	1+1

Задача 10.2. Биомеханика

1. Определите максимальное ускорение, которое способна развить кисть вашей руки в горизонтальном направлении.
2. Определите момент силы, который при этом развивают мышцы руки.

Оборудование: стол, деревянный прямоугольный брусок, лист бумаги, линейка, весы.

Решение

1. Положим брусок на лист бумаги на линейку. Определим методом статического наклона коэффициент трения μ_1 между бруском и бумагой:

$$\mu_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{3.5}{\sqrt{9.5^2 - 3.5^2}} = 0.396.$$

2. Положим брусок на стол. Наклоняя стол, определим коэффициент трения между бруском и столом μ_2:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \mu_2.$$

$$\mu_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{2.8}{\sqrt{9.0^2 - 2.8^2}} = 0.327$$

3. Положим брусок на лист бумаги на расстоянии l_0 от границы листа, но на достаточно большом расстоянии от края стола. Держа лист за край у края стола, выдернем резким движением лист из-под бруска. Замерим перемещение бруска относительно стола l.
4. За время t_1 брусок соскальзывает с листа, двигаясь относительно него с ускорением $a - a_1 = a - \mu_1 g$, где a – ускорение листа, равное ускорению кисти руки, $a_1 = \mu_1 g$ – ускорение, создаваемое силой трения бруска о лист бумаги. При этом

$$l_0 = (a - a_1)\frac{t_1^2}{2}.$$

За это время относительно стола брусок переместится на расстояние

$$l_1 = a_1\frac{t_1^2}{2} = a_1\frac{l_0}{a - a_1}.$$

При этом его скорость в момент времени t_1 может быть найдена из условия

$$v_1^2 = 2a_1 l_1$$

Дальнейший путь l_2 до остановки брусок скользит по столу с ускорением $a_2 = \mu_2 g$, откуда

$$v_1^2 = 2a_2 l_2 \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{a_1 l_1}{a_2}.$$

Перемещение бруска относительно стола может быть найдено как

$$l = l_1 + l_2 = \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) l_1 = \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)\frac{a_1}{a - a_1} l_0.$$

Решая уравнение, найдем:

$$a = a_1\left(1+\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right)\frac{l_0}{l}\right) = \mu_1 g\left(1+\left(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{l_0}{l}\right),$$

$$a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha_1\left(1+\left(1+\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2}\right)\frac{l_0}{l}\right).$$

5. Ускорение максимально, когда l – минимально. Проводя серию опытов, исключим из рассмотрения те, в которых брусок подпрыгивал. Выберем из оставшихся результатов минимальное l/l_0, по которому найдем максимальное ускорение.

$$l_0 = 11\,\text{см},\ l = 1.8\,\text{см}$$

$$a = 56\,\text{м/с}^2$$

6. Для нахождения силы взвесим руку, держа плечо вертикально, расслабленное предплечье горизонтально, а кисть положив на весы. Показания весов $m_1 = 0.8\,\text{кг}$ приблизительно вдвое меньше массы предплечья с кистью: $m_{np} = 2m_1 = 1.6\,\text{кг}$.
7. Аналогичное взвешивание проведем с прямой рукой (показания весов $m_2 = 1.8\,\text{кг}$), что позволит найти массу плеча: $m_n = 2m_2 - m_{np} = 2(m_2 - m_1) = 2\,\text{кг}$.
8. Выдергивание листа бумаги может быть достигнуто либо за счет усилия поворота плеча в плечевом суставе при движении его назад в сторону спины, тогда предплечье движется поступательно, а плечо вращается. Длина плеча примерно равно длине предплечья $L = 0.35\,\text{м}$, откуда

$$M = I\beta = \left(m_{np}L^2 + \frac{m_n L^2}{3}\right)\frac{a}{L} = 2\left(m_1 + \frac{m_2 - m_1}{3}\right)aL,$$

либо при повороте предплечья в сторону при неподвижном плече, тогда, пренебрегая моментом инерции плеча,

$$M = I\beta = \frac{m_{np}L^2}{3}\frac{a}{L} = \frac{2m_1}{3}aL$$

Примерно одинаковые моменты силы во втором случае порождают большее ускорение. Более вероятно, что для получения максимального ускорения следует использовать именно второй способ, что и получилось в эксперименте (которому соответствуют приведенные числа). Отсюда

$$M = \frac{1.6}{3} 0.35a = 10.5\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Критерии оценивания

1.	Определен коэффициент трения между бруском и бумагой	1
2.	Определен коэффициент трения между бруском и столом	1
3.	Выведена формула для определения ускорения кисти руки	3
4.	Проведена серия опытов для определения l, проанализированы условия получения максимального ускорения. Определен и обоснован способ выбора максимального ускорения.	2
5.	Найдено значение максимального ускорения (число + оценка погрешности)	1+1
6.	Измерено значение m_{np} и/или m_n	2
7.	Получены возможные формулы для определения момента силы и проанализированы условия получения максимального ускорения.	1
8.	Проанализированы различные способы определения ускорения кисти.	1
9.	Найдено значение момента силы M (число + оценка погрешности)	1+1