Районный тур 2021/22. 10 класс. I вариант

Задача 1.

До взрыва снаряд движется по закону

$$\begin{cases} y = V_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2 \\ x = V_0 \cos\alpha\, t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{tg}\alpha\, x - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}\,. \tag{1}$$

Это уравнение параболы, которая определена параметрами V_0 и α.

Мысленно продолжив параболу за точку взрыва до земли, введем расстояние l_0 — дальность полета по этой параболе, если бы взрыва не было (см. Рис. 1). Из уравнения (1) получим

$$l_0 = \frac{V_0^2}{g}\sin(2\alpha)\,. \tag{2}$$

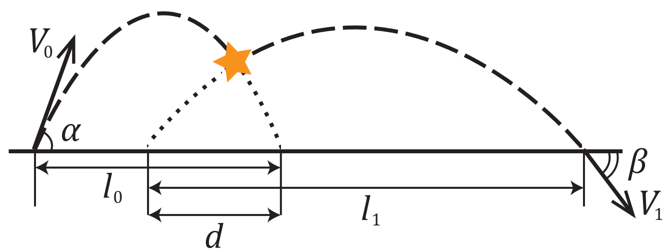

Рис. 1

После взрыва каждый из осколков тоже движется по своей параболе. Траектория осколка, отлетевшего на большее расстояние L от точки выстрела, определяется параметрами V_1 и β. Действительно, если продолжить параболу за точку взрыва, то такая парабола совпадет с траекторией снаряда, выпущенного с земли с начальной скоростью V_1 под углом β. Аналогично (2) имеем:

$$l_1 = \frac{V_1^2}{g}\sin(2\beta)\,. \tag{3}$$

При этом $L = l_0 + l_1 - d$ (расстояние d определено на Рис. 1). Расстояние L максимально, когда $d = 0$, т.е. когда взрыв произошел прямо у поверхности земли:

$$L_{\max} = l_0 + l_1 = \frac{V_0^2\sin(2\alpha) + V_1^2\sin(2\beta)}{g} = V_0^2\,\frac{\sin(2\alpha) + 4\sin(2\beta)}{g}\,. \tag{4}$$

Теперь найдем энергию взрыва E. В момент непосредственно до взрыва снаряд движется к земле со скоростью V_0, направленной под углом α к горизонту. Скорость рассматриваемого осколка сразу после взрыва равна V_1 и направлена от земли под углом β. Перейдем в систему отсчета, связанную со снарядом непосредственно до взрыва. В такой системе осколки разлетаются после взрыва со скоростями, равными по модулю (обозначим его за u) и противоположными по направлению (в силу закона сохранения импульса, который выполняется несмотря на наличие силы тяжести благодаря мгновенности взрыва). Эта скорость обеспечивается энергией взрыва:

$$E = 2\,\frac{mu^2}{2}\,. \tag{5}$$

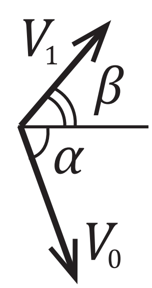

Рис. 2

По правилу перехода из одной системы отсчета в другую имеем $\vec{u} = \vec{V_1} - \vec{V_0}$, и, согласно формуле (5), энергия равна (см. Рис. 2):

$$E = mu^2 = m\left(V_1^2 + V_0^2 - 2V_1V_0\cos(\alpha+\beta)\right) = mV_0^2\big(5 - 4\cos(\alpha+\beta)\big)\,. \tag{6}$$

<u>Ответ</u>: $L_{\max} = (\sin(2\alpha) + 4\sin(2\beta))V_0^2/g$, $E = mV_0^2\,(5 - 4\cos(\alpha+\beta))$.

Задача 2.

Обозначим силы, действующие на верхнюю деталь, так, как это показано на Рис. 3. Выпишем условия равновесия этой детали. Равнодействующая сила должна быть равна нулю:

$$T_2 + T_3 + Mg - T_1 = 0\,. \tag{7}$$

Из этого уравнения следует, в частности, что максимальное натяжение испытывает центральная нить. Суммарный момент внешних сил относительно любой точки также должен обращаться в нуль. Рассмотрим моменты сил относительно точки A:

$$bT_1 + aT_3 - (a+2b)T_2 = 0\,. \tag{8}$$

Следует отметить, что система уравнений (7) и (8) определяет силы T_1, T_2 и T_3 неоднозначно. Выразим силу T_1 через Mg и T_3:

$$T_1 = 2T_3 + \frac{a+2b}{a+b}Mg\,. \tag{9}$$

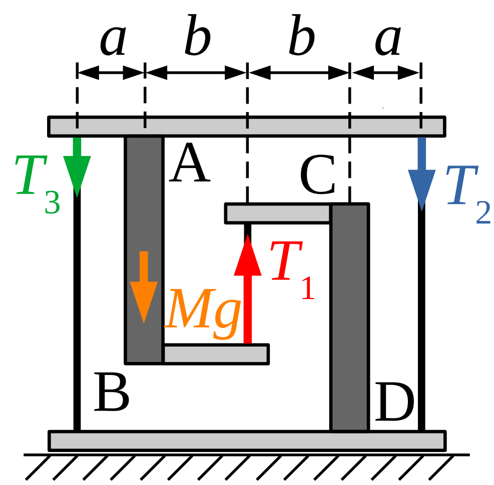

Рис. 3

Из уравнения (9) видно, что, ослабляя натяжение T_3 левой нити, можно уменьшать нагрузку, приходящуюся на центральную нить. Наиболее оптимальная для условия задачи ситуация реализуется, когда левая нить вообще не натянута, $T_3 = 0$, и имеет только "декоративное" назначение. При этом минимальная сила, которую должны выдерживать нити, чтобы конструкция не развалилась, равна

$$T = T_1\Big|_{T_3=0} = \frac{a+2b}{a+b}Mg\,. \tag{10}$$

Ответ: Минимальная сила натяжения, которую должны выдерживать нити, равна $T = Mg(a+2b)/(a+b)$.

Задача 3.

Рассмотрим первый случай, когда выстрел производится из гладкоствольного ружья. Энергия выстрела E равна кинетической энергии пули при вылете из ствола:

$$E = \frac{mv_1^2}{2}\,, \tag{11}$$

где m — масса пули, а v_1 — скорость пули при вылете из ствола. Обозначим за D расстояние между стволом ружья и мишенью. Время полета пули составляет $\tau = D/v_1$. Тогда для отклонения по вертикали можно записать

$$h_1 = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{gD^2}{2v_1^2}\,. \tag{12}$$

Пусть во втором случае, когда на внутреннюю поверхность ствола нанесены бороздки, пуля вылетает из ствола с поступательной скоростью v_2, а угловая скорость вращения пули равна ω. Энергия выстрела E переходит в кинетическую энергию поступательного движения и вращения пули. Чтобы записать выражение для полной кинетической энергии пули, достаточно, например, заметить, что модуль полной скорости каждой точки пули равен $\sqrt{v_2^2 + (\omega R)^2}$, поскольку компоненты скорости, связанные с поступательным движением и вращением, перпендикулярны друг другу. Тогда имеем

$$E = \frac{m}{2}\left[v_2^2 + (\omega R)^2\right]. \tag{13}$$

По условию задачи дано число витков резьбы N, что позволяет получить кинематическую связь между v_2 и ω. Рассмотрим малый промежуток времени Δt непосредственно перед вылетом пули из ствола. За это время пуля проходит расстояние $\Delta x = v_2 \Delta t$. Если обозначить длину ствола за L, то на расстоянии Δx угол поворота пули составляет $\Delta\varphi = (\Delta x/L)2\pi N$. Отсюда получаем $\omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi N v_2/L$. Заметим, что скорость поступательного движения и угловая скорость пули не обязаны быть постоянными в процессе движения пули в стволе.

Теперь выражение (13) можно записать в виде

$$E = \frac{mv_2^2}{2}\left[1 + \left(\frac{2\pi NR}{L}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Поскольку пуля движется в вакууме, ее угловая скорость постоянна, а связь вертикального отклонения h_2 и скорости v_2 полностью аналогична (12):

$$h_2 = \frac{gD^2}{2v_2^2}\,. \tag{15}$$

Приравнивая выражения (11) и (14) и используя (12) и (15), получаем

$$\frac{h_2}{h_1} = 1 + \left(\frac{2\pi NR}{L}\right)^2. \tag{16}$$

Отсюда легко выразить искомую длину ствола L:

$$L = \frac{2\pi NR}{\sqrt{h_2/h_1 - 1}}\,. \tag{17}$$

Ответ: Длина ствола равна $L = 2\pi NR(h_2/h_1 - 1)^{-1/2}$.

Задача 4.

Рассмотрим первую конфигурацию, когда ползунок реостата P_1 находится посередине, а ползунок P_2 в крайнем правом положении. Электрическая схема для этого случая представлена на Рис. 4 (а). По условию дано, что сопротивление между точками B и C составляет $5R/7$. Если вычислить это сопротивление, используя схему, то можно будет определить неизвестное сопротивление r. Эквивалентная схема при подключении напряжения к точкам B и C изображена на Рис. 4 (б). Найдем полное сопротивление такой цепи:

$$R_{\mathrm{BC}} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{2}{R} + \frac{1}{R}} + \frac{r(R/2)}{r + R/2} = \frac{2}{7}\,R + \frac{rR}{R + 2r}\,. \tag{18}$$

Приравнивая эту величину к $5R/7$, находим $r = 3R$.

Для ответа на второй вопрос задачи изобразим электрическую схему в случае, когда ползунок P_1 находится в крайнем правом положении, а ползунок P_2 расположен посередине (Рис. 5). Эквивалентная схема

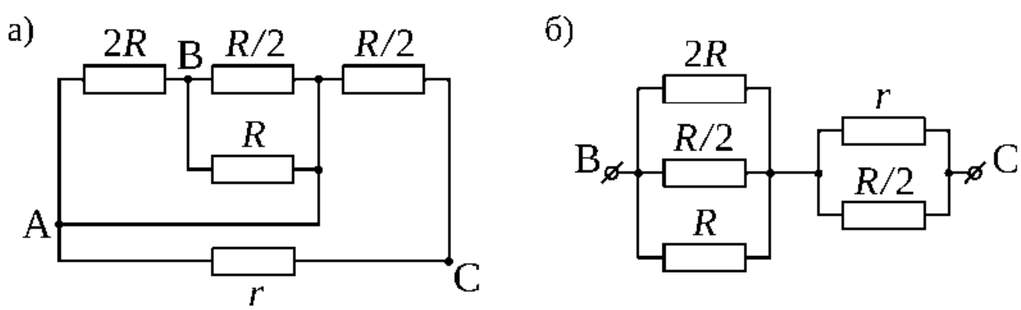

Рис. 4

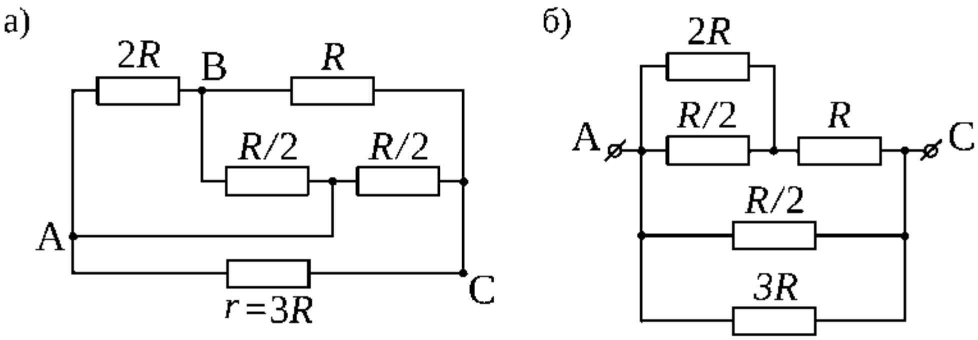

Рис. 5

при подключении напряжения к точкам A и C представлена на Рис. 5 (б). Обозначим эквивалентное сопротивление трех верхних резисторов сопротивлениями $2R$, $R/2$ и R за R_* и вычислим полное сопротивление такой цепи:

$$R_* = \frac{2R(R/2)}{2R + R/2} + R, \tag{19}$$

$$R_{\text{AC}} = \frac{1}{\frac{1}{R_*} + \frac{2}{R} + \frac{1}{3R}} = \frac{21}{64}\,R\,. \tag{20}$$

<u>Ответ</u>: $r = 3R$, $R_{\text{AC}} = (21/64)R$.

Задача 5.

По условию задачи не сказано, с какой стороны от линзы должно попасть изображение, сказано лишь, что оно должно оказаться на главной оптической оси на расстоянии $L = 2a$. Таких точек, очевидно, две. Мы решим задачу для произвольной величины $L > a$, и лишь в ответах положим $L = 2a$.

Самое простое — расположить зеркало так, чтобы изображение лампочки в нем, минуя зеркало, оказалось в нужной точке. Соответствующее решение представлено на Рис. 6. Такое изображение получается, когда свет от лампочки (представлена светлой звездочкой) попадает на зеркало, ни разу не пройдя сквозь линзу. При этом мнимое изображение (представлено черной звездочкой) находится на таком же расстоянии за зеркалом, что и лампочка перед зеркалом. Принцип построения изображения в плоском зеркале показан на Рис. 7. Понятно, что зеркало надо поставить перпендикулярно главной оптической оси, точно посередине между лампочкой и точкой, куда должно попасть изображение. Легко понять, что зеркало должно быть с той же стороны от линзы, что и лампочка, и располагаться на расстоянии $a + (L - a)/2 = (a + L)/2 = 3a/2$ от центра линзы.

Однако, можно поступить и иначе. Предположим, что свет прошел через линзу и образовал изображение на расстоянии b от нее (см. Рис. 8, изображение представлено серой звездочкой), причем по правилу тонкой

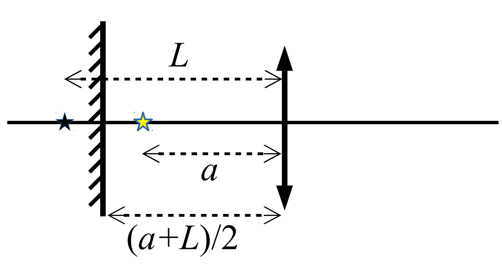

Рис. 6

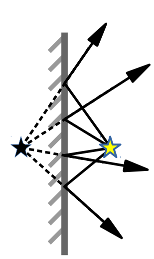

Рис. 7

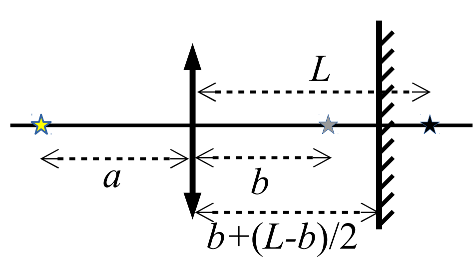

Рис. 8

линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F} \qquad \Rightarrow \qquad b=\frac{Fa}{a-F}\,. \tag{21}$$

Но так как нам нужно, чтобы изображение попало на расстояние $L=2a$ от центра линзы (в место, помеченное черной звездочкой), следует поставить зеркало посередине между серой и черной звездочками. Тогда лучи, прошедшие через линзу, попадут на зеркало так, словно выходят из серой звездочки, и после отражения сформируют изображение за зеркалом — там, где надо. При этом способе зеркало располагается с противоположной от линзы стороны, чем лампочка, на расстоянии (см. Рис. 8)

$$b+\frac{L-b}{2}=\frac{L+b}{2}=\frac{2a+\frac{Fa}{a-F}}{2}=a+\frac{Fa}{2(a-F)}\,. \tag{22}$$

Разумеется, можно поступить наоборот. Сначала свет лампочки может отразиться от зеркала и сформирует в нем изображение (серую звездочку на Рис. 9). А потом отраженный свет (а ход его лучей такой же, как если бы они просто выходили из серой звездочки) может пройти линзу и образовать изображение — в точности где требуется, на расстоянии $L=2a$ от линзы. Но тогда изображение лампочки в зеркале должно быть на расстоянии x от линзы, причем по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{L}=\frac{1}{F} \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{FL}{L-F}\,. \tag{23}$$

При этом способе зеркало располагается с той же стороны от линзы, что и лампочка, на расстоянии

$$a+\frac{x-a}{2}=\frac{x+a}{2}=\frac{FL}{2(L-F)}+\frac{a}{2}=\frac{Fa}{2a-F}+\frac{a}{2}\,. \tag{24}$$

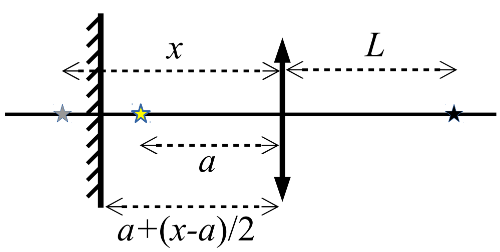

Рис. 9

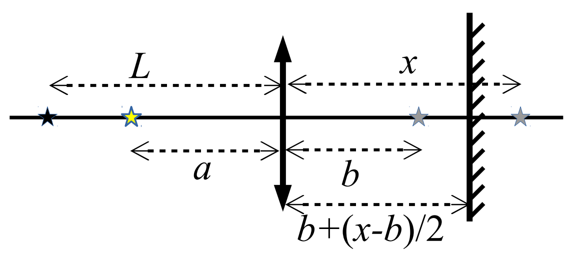

Рис. 10

Но и это не все! Посмотрите на Рис. 10: свет лампочки, пройдя линзу и отразившись от зеркала, может снова пройти сквозь линзу и сформировать изображение на расстоянии L от центра линзы! Для этого изображение лампочки, после прохождения линзы и отражения от зеркала должно быть на x правее центра линзы. Но после прохождения лучами только линзы изображение будет формироваться на расстоянии b. Значит, посередине между x и b и надо поставить зеркало. Всего в этой ситуации имеется два "промежуточных изображения", представленных серыми звездочками, и финальное изображение (черная звездочка), полученное после преломления в линзе, отражения от зеркала и еще одного преломления в линзе. В этом случае зеркало расположено с противоположной стороны от линзы, чем лампочка, на расстоянии

$$\frac{x+b}{2}=\frac{FL}{2(L-F)}+\frac{Fa}{2(a-F)}=\frac{Fa}{2a-F}+\frac{Fa}{2(a-F)}\,. \tag{25}$$

<u>Ответ</u>: Существует 4 варианта расположения зеркала. С той же стороны, что и лампочка, перпендикулярно главной оптической оси на расстоянии $3a/2$ или $Fa/(2a-F)+a/2$. С противоположной от лампочки стороны на расстоянии $Fa/(2a-2F)+a$ или $Fa/(2a-F)+Fa/(2a-2F)$.

Районный тур 2021/22. 10 класс. II вариант

Задача 1.

До взрыва снаряд движется по закону

$$\begin{cases} y = V_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2 \\ x = V_0 \cos\alpha\, t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{tg}\alpha\, x - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}\,. \tag{26}$$

Это уравнение параболы, которая определена параметрами V_0 и α.

Мысленно продолжив параболу за точку взрыва до земли, введем расстояние l_0 — дальность полета по этой параболе, если бы взрыва не было (см. Рис. 11). Из уравнения (26) получим

$$l_0 = \frac{V_0^2}{g}\sin(2\alpha)\,. \tag{27}$$

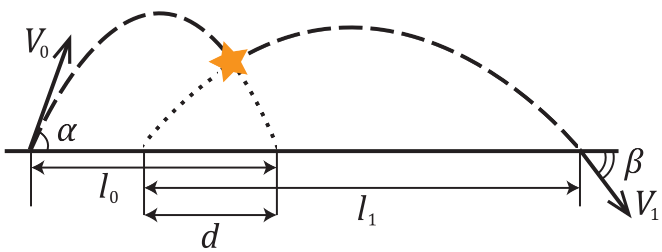

Рис. 11

После взрыва каждый из осколков тоже движется по своей параболе. Траектория осколка, отлетевшего на большее расстояние L от точки выстрела, определяется параметрами V_1 и β. Действительно, если продолжить параболу за точку взрыва, то такая парабола совпадет с траекторией снаряда, выпущенного с земли с начальной скоростью V_1 под углом β. Аналогично (27) имеем:

$$l_1 = \frac{V_1^2}{g}\sin(2\beta)\,. \tag{28}$$

При этом $L = l_0 + l_1 - d$ (расстояние d определено на Рис. 11). Расстояние L максимально, когда $d = 0$, т.е. когда взрыв произошел прямо у поверхности земли:

$$L_{\max} = l_0 + l_1 = \frac{V_0^2\sin(2\alpha) + V_1^2\sin(2\beta)}{g} = V_0^2\,\frac{\sin(2\alpha) + 9\sin(2\beta)}{g}\,. \tag{29}$$

Теперь найдем энергию взрыва E. В момент непосредственно до взрыва снаряд движется к земле со скоростью V_0, направленной под углом α к горизонту. Скорость рассматриваемого осколка сразу после взрыва равна V_1 и направлена от земли под углом β. Перейдем в систему отсчета, связанную со снарядом непосредственно до взрыва. В такой системе осколки разлетаются после взрыва со скоростями, равными по модулю (обозначим его за u) и противоположными по направлению (в силу закона сохранения импульса, который выполняется несмотря на наличие силы тяжести благодаря мгновенности взрыва). Эта скорость обеспечивается энергией взрыва:

$$E = 2\,\frac{mu^2}{2}\,. \tag{30}$$

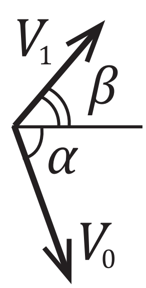

Рис. 12

По правилу перехода из одной системы отсчета в другую имеем $\vec{u} = \vec{V_1} - \vec{V_0}$, и, согласно формуле (30), энергия равна (см. Рис. 12):

$$E = mu^2 = m\left(V_1^2 + V_0^2 - 2V_1V_0\cos(\alpha+\beta)\right) = 2mV_0^2\left(5 - 3\cos(\alpha+\beta)\right). \tag{31}$$

<u>Ответ</u>: $L_{\max} = (\sin(2\alpha) + 9\sin(2\beta))V_0^2/g$, $E = 2mV_0^2(5 - 3\cos(\alpha+\beta))$.

Задача 2.

Обозначим искомую массу детали через M. Силы, действующие на верхнюю деталь, показаны на Рис. 13. Выпишем условия равновесия этой детали. Равнодействующая сила должна быть равна нулю:

$$T_2 + T_3 + Mg - T_1 = 0\,. \tag{32}$$

Из этого уравнения следует, в частности, что максимальное натяжение испытывает центральная нить. Следовательно, при увеличении нагрузки порвется именно она. Суммарный момент внешних сил относительно любой точки также должен обращаться в нуль. Рассмотрим моменты сил относительно точки C:

$$dT_1 + cT_3 - (c + 2d)T_2 = 0\,. \tag{33}$$

Следует отметить, что система уравнений (32) и (33) определяет силы T_1, T_2 и T_3 неоднозначно. Выразим силу T_1 через Mg и T_3:

$$T_1 = 2T_3 + \frac{c+2d}{c+d} Mg\,. \tag{34}$$

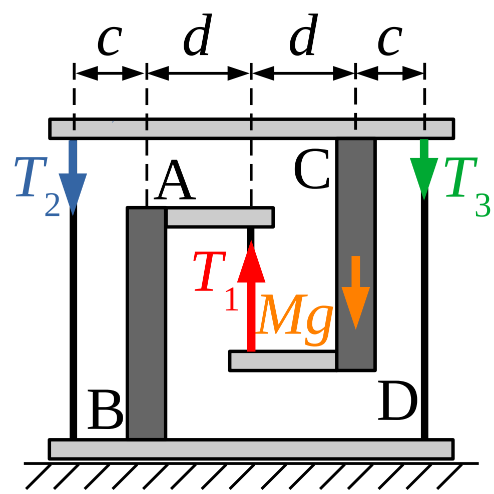

Рис. 13

Из уравнения (34) видно, что, ослабляя натяжение T_3 левой нити, можно уменьшать нагрузку, приходящуюся на центральную нить. Наиболее оптимальная для условия задачи ситуация реализуется, когда правая нить вообще не натянута, $T_3 = 0$, и имеет только "декоративное" назначение. При этом максимально возможная масса детали оказывается равной

$$M = \frac{c+d}{c+2d} \frac{T}{g}\,. \tag{35}$$

Ответ: Максимальная масса детали определена уравнением (35).

Задача 3.

Рассмотрим первый случай, когда выстрел производится из гладкоствольного ружья. Энергия выстрела E равна кинетической энергии пули при вылете из ствола:

$$E = \frac{mv_1^2}{2}\,, \tag{36}$$

где m — масса пули, а v_1 — скорость пули при вылете из ствола. Обозначим за D расстояние между стволом ружья и мишенью. Время полета пули составляет $\tau = D/v_1$. Тогда для отклонения по вертикали можно записать

$$h_1 = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{gD^2}{2v_1^2}\,. \tag{37}$$

Пусть во втором случае, когда на внутреннюю поверхность ствола нанесены бороздки, пуля вылетает из ствола с поступательной скоростью v_2, а угловая скорость вращения пули равна ω. Энергия выстрела E переходит в кинетическую энергию поступательного движения и вращения пули. Обозначим радиус пули за R. Чтобы записать выражение для полной кинетической энергии пули, достаточно, например, заметить, что модуль полной скорости каждой точки пули равен $\sqrt{v_2^2 + (\omega R)^2}$, поскольку компоненты скорости, связанные с поступательным движением и вращением, перпендикулярны друг другу. Тогда имеем

$$E = \frac{m}{2}\left[v_2^2 + (\omega R)^2\right]. \tag{38}$$

По условию задачи дано число витков резьбы N, что позволяет получить кинематическую связь между v_2 и ω. Рассмотрим малый промежуток времени Δt непосредственно перед вылетом пули из ствола. За это время пуля проходит расстояние $\Delta x = v_2 \Delta t$, а угол поворота пули составляет $\Delta\varphi = (\Delta x/L)2\pi N$. Отсюда получаем $\omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi N v_2/L$. Заметим, что скорость поступательного движения и угловая скорость пули не обязаны быть постоянными в процессе движения пули в стволе.

Теперь выражение (38) можно записать в виде

$$E = \frac{mv_2^2}{2}\left[1 + \left(\frac{2\pi NR}{L}\right)^2\right]. \tag{39}$$

Поскольку пуля движется в вакууме, ее угловая скорость постоянна, а связь вертикального отклонения h_2 и скорости v_2 полностью аналогична (37):

$$h_2 = \frac{gD^2}{2v_2^2}\,. \tag{40}$$

Приравнивая выражения (36) и (39) и используя (37) и (40), получаем

$$\frac{h_2}{h_1} = 1 + \left(\frac{2\pi NR}{L}\right)^2. \tag{41}$$

Отсюда легко выразить искомый радиус пули R:

$$R = \frac{L}{2\pi N}\sqrt{h_2/h_1 - 1}\,. \tag{42}$$

Ответ: Радиус пули равен $R = (L/2\pi N)\sqrt{h_2/h_1 - 1}$.

Задача 4.

Рассмотрим первую конфигурацию, когда ползунок реостата P_1 находится в крайнем правом положении, а ползунок P_2 посередине. Электрическая схема для этого случая представлена на Рис. 14 (а). По условию дано, что сопротивление между точками B и C составляет $7R/10$. Если вычислить это сопротивление, используя схему, то можно будет определить неизвестное сопротивление r. Эквивалентная схема при подключении напряжения к точкам B и C изображена на Рис. 14 (б). Найдем полное сопротивление такой цепи:

$$R_{\text{BC}} = \frac{r(R/2)}{r + R/2} + \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{R} + \frac{2}{R}} = \frac{rR}{R + 2r} + \frac{3}{10}\,R\,. \tag{43}$$

Приравнивая эту величину к $7R/10$, находим $r = 2R$.

Для ответа на второй вопрос задачи изобразим электрическую схему в случае, когда ползунок P_1 расположен посередине, а ползунок P_2 находится в крайнем левом положении (Рис. 15). Эквивалентная схема

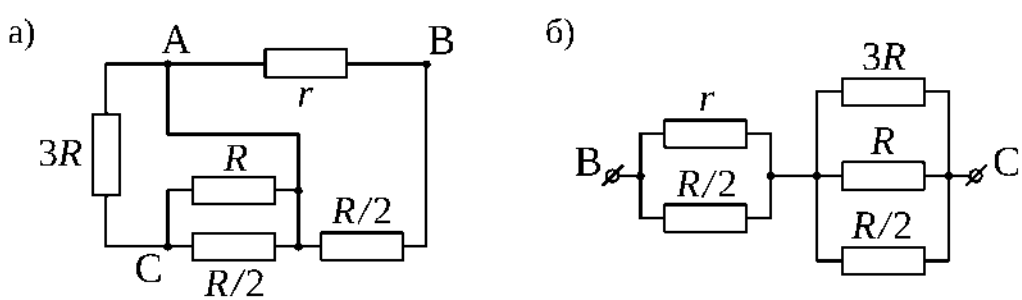

Рис. 14

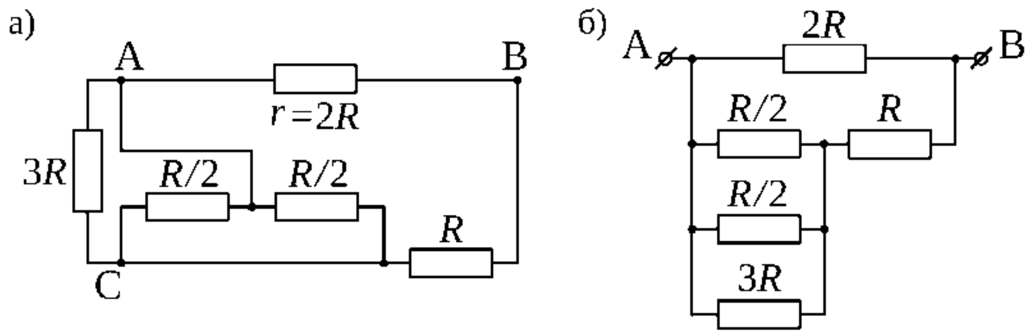

Рис. 15

при подключении напряжения к точкам A и B представлена на Рис. 15 (б). Обозначим эквивалентное сопротивление трех резисторов $R/2$, $R/2$ и $3R$ за R_* и вычислим полное сопротивление такой цепи:

$$R_* = \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{2}{R} + \frac{1}{3R}} = \frac{3}{13}\,R, \tag{44}$$

$$R_{\text{AB}} = \frac{2R(R_* + R)}{2R + R_* + R} = \frac{16}{21}\,R\,. \tag{45}$$

Ответ: $r = 2R$, $R_{\text{AB}} = (16/21)R$.

Задача 5.

По условию задачи не сказано, с какой стороны от линзы должно попасть изображение, сказано лишь, что оно должно оказаться на главной оптической оси на расстоянии $L = 3a$. Таких точек, очевидно, две. Мы решим задачу для произвольной величины $L > a$, и лишь в ответах положим $L = 3a$.

Самое простое — расположить зеркало так, чтобы изображение лампочки в нем, минуя зеркало, оказалось в нужной точке. Соответствующее решение представлено на Рис. 16. Такое изображение получается, когда свет от лампочки (представлена светлой звездочкой) попадает на зеркало, ни разу не пройдя сквозь линзу. При этом мнимое изображение (представлено черной звездочкой) находится на таком же расстоянии за зеркалом, что и лампочка перед зеркалом. Принцип построения изображения в плоском зеркале показан на Рис. 17. Понятно, что зеркало надо поставить перпендикулярно главной оптической оси, точно посередине между лампочкой и точкой, куда должно попасть изображение. Легко понять, что зеркало должно быть с той же стороны от линзы, что и лампочка, и располагаться на расстоянии $a + (L - a)/2 = (a + L)/2 = 2a$ от центра линзы.

Однако, можно поступить и иначе. Предположим, что свет прошел через линзу и образовал изображение на расстоянии b от нее (см. Рис. 18, изображение представлено серой звездочкой), причем по правилу тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{Fa}{a - F}\,. \tag{46}$$

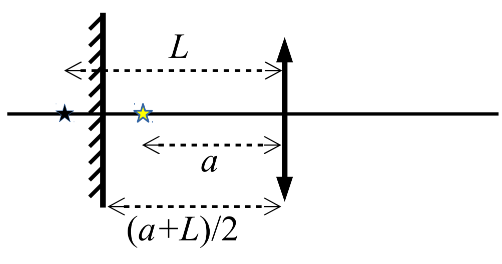

Рис. 16

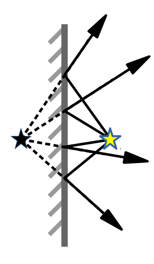

Рис. 17

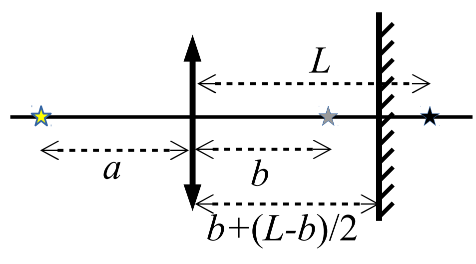

Рис. 18

Но так как нам нужно, чтобы изображение попало на расстояние $L = 2a$ от центра линзы (в место, помеченное черной звездочкой), следует поставить зеркало посередине между серой и черной звездочками. Тогда лучи, прошедшие через линзу, попадут на зеркало так, словно выходят из серой звездочки, и после отражения сформируют изображение за зеркалом — там, где надо. При этом способе зеркало располагается с противоположной от линзы стороны, чем лампочка, на расстоянии (см. Рис. 18)

$$b + \frac{L-b}{2} = \frac{L+b}{2} = \frac{3a + \frac{Fa}{a-F}}{2} = \frac{3a}{2} + \frac{Fa}{2(a-F)}\,. \tag{47}$$

Разумеется, можно поступить наоборот. Сначала свет лампочки может отразиться от зеркала и сформирует в нем изображение (серую звездочку на Рис. 19). А потом отраженный свет (а ход его лучей такой же, как если бы они просто выходили из серой звездочки) может пройти линзу и образовать изображение — в точности где требуется, на расстоянии $L = 2a$ от линзы. Но тогда изображение лампочки в зеркале должно быть на расстоянии x от линзы, причем по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L} = \frac{1}{F} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{FL}{L-F}\,. \tag{48}$$

При этом способе зеркало располагается с той же стороны от линзы, что и лампочка, на расстоянии

$$a + \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} = \frac{FL}{2(L-F)} + \frac{a}{2} = \frac{3Fa}{2(3a-F)} + \frac{a}{2}\,. \tag{49}$$

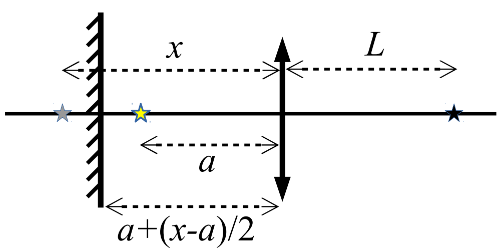

Рис. 19

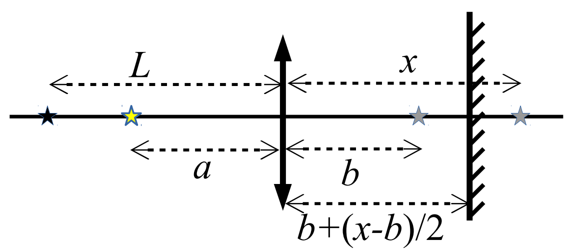

Рис. 20

Но и это не все! Посмотрите на Рис. 20: свет лампочки, пройдя линзу и отразившись от зеркала, может снова пройти сквозь линзу и сформировать изображение на расстоянии L от центра линзы! Для этого изображение лампочки, после прохождения линзы и отражения от зеркала должно быть на x правее центра линзы. Но после прохождения лучами только линзы изображение будет формироваться на расстоянии b. Значит, посередине между x и b и надо поставить зеркало. Всего в этой ситуации имеется два “промежуточных изображения”, представленных серыми звездочками, и финальное изображение (черная звездочка), полученное после преломления в линзе, отражения от зеркала и еще одного преломления в линзе. В этом случае зеркало расположено с противоположной стороны от линзы, чем лампочка, на расстоянии

$$\frac{x+b}{2} = \frac{FL}{2(L-F)} + \frac{Fa}{2(a-F)} = \frac{3Fa}{2(3a-F)} + \frac{Fa}{2(a-F)}\,. \tag{50}$$

Ответ: Существует 4 варианта расположения зеркала. С той же стороны, что и лампочка, перпендикулярно главной оптической оси на расстоянии $2a$ или $3Fa/(6a-2F)+a/2$. С противоположной от лампочки стороны на расстоянии $Fa/2(a-F)+3a/2$ или $3Fa/(6a-2F)+Fa/(2(a-F))$.