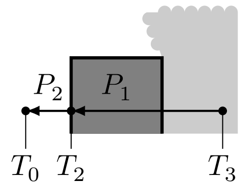
Возможные решения задач
9 класс

Задача 1. Рихман, Ньютон-Рихман



Рассмотрим внешнюю поверхность трубы в верхней точке. Поскольку её температура не меняется, мощность теплопередачи от пара должна быть равна мощности теплоотдачи в окружающую среду:

$$P_1 = P_2. \tag{1}$$

Так как мощность теплопередачи пропорциональна разности температур, имеем

$$\alpha(T_3 - T_2) = \beta(T_2 - T_0), \tag{2}$$

где α и β — некоторые коэффициенты пропорциональности. Аналогично, для точки у основания:

$$\alpha(T_4 - T_1) = \beta(T_1 - T_0), \tag{3}$$

где T_4 — температура пара на входе в трубу. Поделим одно уравнение на другое и получим

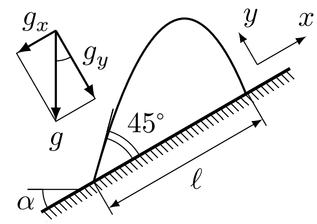
$$\frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}. \tag{4}$$

Выражаем искомую температуру

$$T_4 = T_1 + \frac{(T_3 - T_2)(T_1 - T_0)}{T_2 - T_0}. \tag{5}$$

Ответ: Температура пара на входе в трубу равна $T_1 + \frac{(T_3-T_2)(T_1-T_0)}{T_2-T_0}$.

Задача 2. Представьте себе



Рассмотрим прыжок кузнечика со скоростью v под углом 45° к наклонной поверхности с углом α. Удобно развернуть систему координат, направив ось x вдоль плоскости. Тогда ускорение свободного падения разбивается на две компоненты. Перпендикулярная плоскости компонента g_y позволяет найти время полёта

$$t = \frac{2v_y}{g_y} = \frac{2v\sin 45^\circ}{g\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}v}{g\cos\alpha}. \tag{6}$$

Теперь, используя компоненту ускорения g_x вдоль плоскости, нетрудно найти и дальность полёта

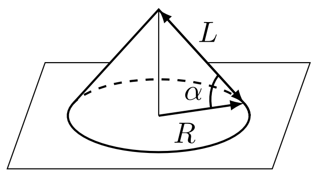
$$\begin{aligned} \ell = v_x t - \frac{g_x t^2}{2} &= v\cos 45^\circ \frac{\sqrt{2}v}{g\cos\alpha} - \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{\sqrt{2}v}{g\cos\alpha}\right)^2 \\ &= \frac{v^2}{g\cos\alpha}\left(1 - \operatorname{tg}\alpha\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Полученная формула годится как для подъёма кузнечика в гору, так и для спуска с горы. Для этого надо положить угол наклона поверхности отрицательным. Получаем

$$\text{вверх:}\quad \ell_1 = \frac{v^2}{g\cos\alpha}\left(1 - \operatorname{tg}\alpha\right), \qquad \text{вниз:}\quad \ell_2 = \frac{v^2}{g\cos\alpha}\left(1 + \operatorname{tg}\alpha\right), \tag{8}$$

где мы воспользовались свойствами $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ и $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Для прыжков вокруг основания по плоскости ($\alpha = 0$) имеем

$$\ell_3 = \frac{v^2}{g}. \tag{9}$$



Теперь свяжем расстояния ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 с числами N_1, N_2 и размерами горы. Обозначим радиус основания горы за R, длину образующей конуса (см. рисунок) за L, а угол между основанием и образующей за α. Запишем, как эти величины связаны между собой:

$$\ell_1 = \frac{L}{N_1}, \qquad \ell_2 = \frac{L}{N_2}, \qquad \ell_3 = \frac{2\pi R}{N_3}, \tag{10}$$

где N_3 — количество прыжков кузнечика вокруг основания (мы пренебрегли тем, что кузнечик прыгает по хордам окружности, так как $N_3 \gg 1$).
Глядя на (8) и (9), легко заметить, что

$$\ell_1 + \ell_2 = \frac{2v^2}{g\cos\alpha} = \frac{2\ell_3}{\cos\alpha}. \tag{11}$$

Используем (10), а также тот факт, что $\cos\alpha = R/L$, и получаем

$$\frac{L}{N_1} + \frac{L}{N_2} = \frac{4\pi R}{N_3\cos\alpha} = \frac{4\pi L}{N_3}, \tag{12}$$

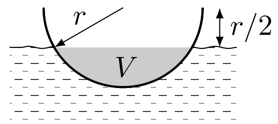
откуда

$$N_3 = \frac{4\pi N_1 N_2}{N_1 + N_2}. \tag{13}$$

Ответ: Путь вокруг основания займёт у кузнечика $\frac{4\pi N_1 N_2}{N_1+N_2}$ прыжков.

Задача 3. Вантуз

Когда полусфера плавает на поверхности, действующая на неё сила тяжести равна силе Архимеда:



$$mg = \rho g V, \tag{14}$$

где V — объём погруженной части (шарового сегмента высоты $r/2$). Объём

$$V = \frac{m}{\rho} \tag{15}$$

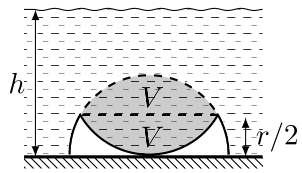
пригодится нам в дальнейшем.
Рассмотрим деформированную полусферу под водой. Силу давления воды на неё можно найти из следующего классического соображения: если бы фигура такой же формы, как эта деформированная полусфера и воздух в ней, была окружена водой со всех сторон, то сила Архимеда, действующая на неё, складывалась бы из сил давления воды на верхнюю и нижнюю части. Верхняя часть состоит из частей сфер, а нижняя — круг. Обозначая силы давления на них за F и F' соответственно, имеем

$$F_\text{A} = F' - F. \tag{16}$$

Силу давления на нижнюю часть легко найти. На этой глубине это просто

$$F' = pS = \rho g h \pi r^2. \tag{17}$$

Чтобы найти силу Архимеда, нужно определить объём деформированной сферы с воздухом. Понятно, что касание выгнутой части и пола возможно только если высота этой части равна $r/2$. Тогда нужный нам объём — это просто объём полусферы, из которого вычли $2V$. Таким образом,



$$F_\text{A} = \rho g \left(\frac{2}{3}\pi r^3 - 2V\right) = g\left(\frac{2}{3}\pi\rho r^3 - 2m\right). \tag{18}$$

В результате, искомая сила

$$F = F' - F_\text{A} = \rho g h \pi r^2 - g\left(\frac{2}{3}\pi\rho r^3 - 2m\right) = \pi\rho g r^2\left(h - \frac{2}{3}r\right) + 2mg. \tag{19}$$

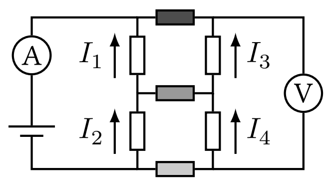
Ответ: Сила давления воды на деформированную полусферу равна $\pi\rho g r^2\left(h - \frac{2}{3}r\right) + 2mg$.

Комментарий: объём шарового сегмента V можно найти по формуле

$$V = \frac{\pi H^2}{3}(3r - H), \tag{20}$$

где H — высота сегмента. Для высоты $r/2$ получаем $V = \frac{5}{24}\pi r^3$, что даёт ответ $F = \pi\rho g r^2\left(h - \frac{r}{4}\right)$. Нетрудно заметить, что для данной фигуры силу давления можно найти через среднее давление (давление на глубине $h - r/4$), однако этот факт совершенно неочевиден и не принимается без доказательства.

Задача 4. Скрытая симметрия



Пусть токи, текущие через вертикальные резисторы, равны I_1, I_2, I_3 и I_4 (см. рисунок). Тогда искомый ток I можно записать двумя способами:

$$I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4. \tag{21}$$

Напряжение на источнике равно $\mathcal{E}$, что можно через падение напряжения на левых резисторах:

$$\mathcal{E} = I_1 r + I_2 r. \tag{22}$$

Напряжение на вольтметре равно U, что можно через падение напряжения на правых резисторах:

$$U = I_3 r + I_4 r. \tag{23}$$

Складывая (22) и (23), получим

$$\mathcal{E} + U = r(I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \tag{24}$$

Собираем токи согласно (21) и получаем

$$\mathcal{E} + U = 2rI, \tag{25}$$

откуда

$$I = \frac{\mathcal{E} + U}{2r}. \tag{26}$$

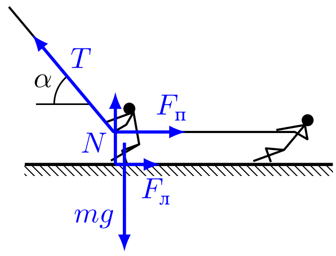
Ответ: Амперметр показывает ток $\frac{\mathcal{E}+U}{2r}$.

Задача 5. Командная работа

Поймём, что делает каждый из рабочих. Поскольку верёвка между ними горизонтальна, всё, что может делать правый рабочий, это тянуть её вправо с силой $F_п$, удовлетворяющей

$$0 \leq F_п \leq \mu mg = \frac{3}{4}mg. \tag{27}$$

С левым рабочим труднее: слева его тянет сила $T = \frac{5}{4}mg$ под углом α, а справа — горизонтальная сила $F_п$. Запишем условие равновесия по вертикальной оси



$$\frac{5}{4}mg\sin\alpha = mg - N, \tag{28}$$

где N — сила реакции опоры. Естественно, $0 \leq N \leq mg$. Условие равновесия по горизонтальной оси

$$\frac{5}{4}mg\cos\alpha = F_л + F_п, \tag{29}$$

где $F_л$ — сила трения левого рабочего об пол. Она ограничена

$$|F_л| \leq \frac{3}{4}N = \frac{3}{4}mg\left(1 - \frac{5}{4}\sin\alpha\right). \tag{30}$$

Объединяя выражения (27)-(30), можем записать следующее неравенство:

$$-\frac{3}{4}N \leq \frac{5}{4}mg\cos\alpha \leq \frac{3}{4}mg\left(2 - \frac{5}{4}\sin\alpha\right). \tag{31}$$

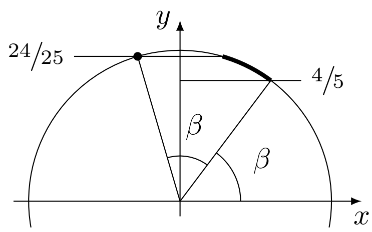
Мы рассматриваем углы $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, а $N \geq 0$, поэтому нижнюю границу можно отбросить. Тогда, преобразуя, имеем

$$\frac{4}{5}\cos\alpha + \frac{3}{5}\sin\alpha \leq \frac{24}{25}. \tag{32}$$

Здесь удобно ввести угол β, такой что $\sin\beta = \frac{4}{5}$, а $\cos\beta = \frac{3}{5}$ (это больший острый угол в прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4 и 5). Тогда, по формуле синуса суммы имеем

$$\sin(\alpha + \beta) \leq \frac{24}{25}. \tag{33}$$

С другой стороны, подставляя в (28) ограничение на N, после простых преобразований получим



$$\sin\alpha \leq \frac{4}{5}, \tag{34}$$

что в нашем диапазоне углов эквивалентно условию $\alpha \leq \beta$.
Чтобы решить систему неравенств (33)-(34), заметим, что $\sin 2\beta = \frac{24}{25}$, причём $90^\circ < 2\beta < 120^\circ$. Тогда, глядя на тригонометрическую окружность, легко понять, что решение для α состоит из промежутка $[0; 180^\circ - 3\beta]$ и изолированной точки $\{\beta\}$.

Ответ: Такое возможно при углах $\alpha \in [0; 180^\circ - 3\beta] \cup \{\beta\}$, где $\beta = \arcsin\frac{4}{5}$. Приближённо это множество можно записать как $[0; 20{,}6^\circ] \cup \{53{,}1^\circ\}$.

Комментарий: изолированную точку (и нестрогую верхнюю границу промежутка) можно было потерять, если для силы реакции опоры записывать $N > 0$ вместо $N \geq 0$. Это упирается в трактовку слов «оба стоят на полу» и не считается за ошибку. Кроме того, нестрогую нижнюю границу промежутка можно было потерять, исключив $\alpha = 0$ из рассмотрения (на картинке это бы соответствовало бесконечному удалению рабочих).