Возможные решения задач
9 класс
1-й вариант

Задача 1. Просто, как раз-два-три

Рассмотрим прямолинейное движение тела из точки с координатой x_0 с начальной скоростью v и постоянным ускорением a. Поделим время на равные промежутки t и запишем перемещение тела за время nt:

$$x_n = \frac{a(nt)^2}{2} + v(nt) + x_0. \tag{1}$$

Тогда за n-ый промежуток тело прошло

$$\begin{aligned}\Delta x_n = x_n - x_{n-1} &= \left(\frac{a(nt)^2}{2} + v(nt) + x_0\right) - \left(\frac{a((n-1)t)^2}{2} + v((n-1)t) + x_0\right) \\ &= \left(vt + \frac{at^2}{2}\right) + at^2(n-1).\end{aligned} \tag{2}$$

Мы видим, что перемещения тел за последовательные равные промежутки времени $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $vt + at^2/2$ и шагом at^2. Согласно условию, для первого тела шаг совпадает с первым членом этой прогрессии, поэтому, обозначая его начальную скорость за v_1, можем записать

$$at^2 = v_1 t + \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{at}{2}. \tag{3}$$

Аналогично для второго тела. Для него шаг в 3 раза больше, чем первый член, поэтому, обозначая его начальную скорость за v_2, запишем

$$at^2 = 3\left(v_2 t + \frac{at^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{at}{6}. \tag{4}$$

Получаем, что модули начальных скоростей относятся как $3:1$. Скорость первого тела направлена по ускорению, т.к. их знаки совпадают, а скорость второго — против.

Ответ: Модули начальных скоростей относятся как $3:1$. Скорость первого тела направлена по ускорению, а скорость второго — против.

Задача 2. Локальное потепление

Пусть V_0 — полный объём айсберга, а V — объём, который растопили и заполнили керосином. Средняя плотность айсберга с керосином:

$$\rho = \frac{(V_0 - V)\rho_л + V\rho_к}{V_0}. \tag{5}$$

Объём надводной части V' пропорционален объёму растопленной части:

$$V' = V_0\left(1 - \frac{\rho}{\rho_в}\right) = V_0\left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right) + \frac{\rho_л - \rho_к}{\rho_в}V. \tag{6}$$

В начале объём надводной части V_1' равен

$$V_1' = V_0\left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right) = \frac{V_0}{10}. \tag{7}$$

Если бы почти весь айсберг растопили и заполнили керосином, надводная часть имела бы объём

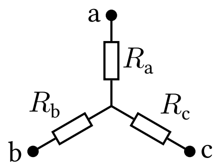
$$V_2' = V_0\left(1 - \frac{\rho_к}{\rho_в}\right) = \frac{V_0}{5} = 2V_1', \tag{8}$$

т.е. объём увеличился бы на 100%. Объём растопленной части прямо пропорционален затраченному теплу. Поскольку увеличению надводного объёма на 20% отвечает теплота Q, увеличению на 100% должна соответствовать теплота $5Q$. Таким образом, для растапливания оставшейся части айсберга пиратам потребуется

$$5Q - Q = 4Q = 40 \text{ ТДж}. \tag{9}$$

Ответ: Пиратам потребуется 40 ТДж тепла.

Задача 3. Круглый ящик



Сперва определим схему внутри «чёрного ящика». Предположим, что она имеет вид «звезды» из резисторов R_a, R_b и R_c.

Поскольку напряжение на вольтметре в положении b равно нулю, должно выполняться хотя бы одно из следующих требований:

1. $R_a = \infty$ (разрыв). В этом случае вольтметр ни к чему не подключен.
2. $R_c = \infty$ (разрыв). В этом случае в схеме не течёт ток.
3. $R_b = 0$. В этом случае вольтметр подключен параллельно участку цепи с нулевым сопротивлением.

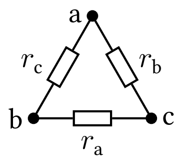
Поскольку в положениях a и c амперметр показывает ненулевой ток, первые два варианта невозможны, значит $R_b = 0$.

Запишем закон Ома для положения a:

$$4\text{ А} = \frac{12\text{ В}}{1\text{ Ом} + R_a} \quad \Rightarrow \quad R_a = \frac{12\text{ В}}{4\text{ А}} - 1\text{ Ом} = 2\text{ Ом}. \tag{10}$$

Запишем закон Ома для положения c:

$$2\text{ А} = \frac{12\text{ В}}{1\text{ Ом} + R_a + R_c} \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{12\text{ В}}{2\text{ А}} - R_a - 1\text{ Ом} = 3\text{ Ом}. \tag{11}$$



Нетрудно убедиться, что альтернативный вариант — схема «треугольник» — приведёт к тому же результату (получится $r_b = \infty$ (разрыв)). Любую схему из резисторов с тремя выводами можно без труда свести эквивалентными преобразованиями к уже рассмотренным.

Теперь найдём показание амперметра в положении b, используя закон Ома:

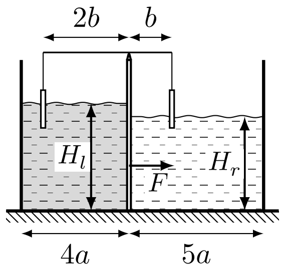
$$I_b = \frac{12\text{ В}}{1\text{ Ом} + R_c} = 3\text{ А}. \tag{12}$$

Показания вольтметра в положениях a и c легко найти, зная токи через амперметр и сопротивления резисторов:

$$U_a = I_a R_a = 4\text{ А} \cdot 2\text{ Ом} = 8\text{ В}, \qquad U_c = I_c R_c = 2\text{ А} \cdot 3\text{ Ом} = 6\text{ В}. \tag{13}$$

Ответ: $I_b = 3$ А, $U_a = 8$ В, $U_c = 6$ В.

Задача 4. Безупречный баланс



Объёмы жидкостей равны, поэтому, учитывая прямоугольную форму сосуда, имеем

$$4aDH_l = 5aDH_r \quad \Rightarrow \quad \frac{H_l}{H_r} = \frac{5}{4}, \tag{14}$$

где D — ширина сосуда перпендикулярно плоскости рисунка, а H_l и H_r — уровни жидкостей в левой и правой части сосуда соответственно.

Перегородка покоится, значит силы давления жидкостей на неё равны. Сила давления F жидкости плотностью ρ на стенку высоты H и ширины D в поле тяжести g должна выражаться по формуле

$$F = C\rho g D^{\alpha} H^{3-\alpha}, \tag{15}$$

где C — безразмерный коэффициент. Этот результат получен просто из анализа размерностей. Тривиальный мысленный эксперимент фиксирует $\alpha = 1$. Обозначим плотность левой жидкости ρ_l, а правой — ρ_r. Тогда условие равновесия перегородки записывается в виде

$$C\rho_l g D H_l^2 = C\rho_r g D H_r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_l}{\rho_r} = \left(\frac{H_r}{H_l}\right)^2 = \frac{16}{25}. \tag{16}$$

Теперь запишем правило рычага для коромысла. Пусть V — объём поплавка, тогда

$$2b\left(V \cdot 1\ \text{г/см}^3 - \frac{2}{3}V\rho_l\right)g = b\left(V \cdot 1\ \text{г/см}^3 - \frac{1}{3}V\rho_r\right)g \quad \Rightarrow \quad 4\rho_l - \rho_r = 3\ \text{г/см}^3. \tag{17}$$

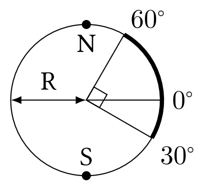
Решая уравнения (16) и (17), получаем

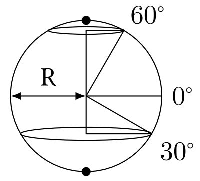
$$\rho_l = \frac{16}{13}\ \text{г/см}^3, \qquad \rho_r = \frac{25}{13}\ \text{г/см}^3. \tag{18}$$

Ответ: Плотность левой жидкости равна $\frac{16}{13}$ г/см^3, а правой — $\frac{25}{13}$ г/см^3.

Задача 5. Бермудский квадрат

Земля, как известно, имеет форму, очень близкую к шарообразной. Обозначим радиус Земли R и разберёмся, какой на самом деле длины сторон «квадрата», изображённого на карте.





Вертикальные линии на карте идут от Северного полюса (верхний край карты) до Южного (нижний край) по кратчайшему пути и образуют полуокружности радиуса R. Таким образом, каждая из вертикальных сторон «квадрата» является дугой радиуса R и угловой меры 90°. Длина такой дуги равна $\pi R/4$.

Горизонтальные линии на карте идут с запада на восток и не пересекаются. Каждая из них лежит в плоскости, параллельной плоскости экватора и образует окружность радиуса $R\cos\varphi$, где φ — угол, отложенный от экватора. Таким образом, верхняя и нижняя стороны «квадрата» являются дугами радиуса $R\cos 60^\circ = R/2$ и $R\cos 30^\circ = \sqrt{3}R/2$ соответственно. Их угловые меры равны 90°, а длины — $\pi R/8$ и $\sqrt{3}\pi R/8$ соответственно.

Получаем, что путь по маршруту AB равен $\pi R/4$, а по маршруту $BCDA$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\pi R + \frac{1}{4}\pi R + \frac{1}{8}\pi R = \frac{3+\sqrt{3}}{8}\pi R. \tag{19}$$

Поскольку скорость самолёта постоянна, время обратного полёта можно найти как

$$T = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{8}\pi R}{\frac{\pi R}{4}} 10 \text{ ч} = 5(3+\sqrt{3}) \text{ ч} \approx 23 \text{ ч } 40 \text{ мин}. \tag{20}$$

Ответ: Полёт обратно займёт приблизительно 23 ч 40 мин.

Возможные решения задач

9 класс

2-й вариант

Задача 1. Просто, как раз-два-три

Рассмотрим прямолинейное движение тела из точки с координатой x_0 с начальной скоростью v и постоянным ускорением a. Поделим время на равные промежутки t и запишем перемещение тела за время nt:

$$x_n = \frac{a(nt)^2}{2} + v(nt) + x_0. \tag{21}$$

Тогда за n-ый промежуток тело прошло

$$\begin{aligned} \Delta x_n = x_n - x_{n-1} &= \left(\frac{a(nt)^2}{2} + v(nt) + x_0\right) - \left(\frac{a((n-1)t)^2}{2} + v((n-1)t) + x_0\right) \\ &= \left(vt + \frac{at^2}{2}\right) + at^2(n-1). \end{aligned} \tag{22}$$

Мы видим, что перемещения тел за последовательные равные промежутки времени $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $vt + at^2/2$ и шагом at^2. Согласно условию, для первого тела шаг совпадает с первым членом этой прогрессии, поэтому, обозначая его начальную скорость за v_1, можем записать

$$at^2 = v_1 t + \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{at}{2}. \tag{23}$$

Аналогично для второго тела. Для него шаг в 4 раза больше, чем первый член, поэтому, обозначая его начальную скорость за v_2, запишем

$$at^2 = 4\left(v_2 t + \frac{at^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{at}{4}. \tag{24}$$

Получаем, что модули начальных скоростей относятся как $2:1$. Скорость первого тела направлена по ускорению, т.к. их знаки совпадают, а скорость второго — против.

Ответ: Модули начальных скоростей относятся как $2:1$. Скорость первого тела направлена по ускорению, а скорость второго — против.

Задача 2. Локальное потепление

Пусть V_0 — полный объём айсберга, а V — объём, который растопили и заполнили керосином. Средняя плотность айсберга с керосином:

$$\rho = \frac{(V_0 - V)\rho_{\text{л}} + V\rho_{\text{к}}}{V_0}. \tag{25}$$

Объём надводной части V' пропорционален объёму растопленной части:

$$V' = V_0\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}}\right) = V_0\left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right) + \frac{\rho_{\text{л}} - \rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{в}}}V. \tag{26}$$

В начале объём надводной части V_1' равен

$$V_1' = V_0\left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right) = \frac{V_0}{10}. \tag{27}$$

Если бы почти весь айсберг растопили и заполнили керосином, надводная часть имела бы объём

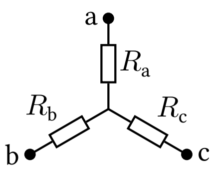
$$V_2' = V_0\left(1 - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{в}}}\right) = \frac{V_0}{5} = 2V_1', \tag{28}$$

т.е. объём увеличился бы на 100%. Объём растопленной части прямо пропорционален затраченному теплу. Поскольку увеличению надводного объёма на 40% отвечает теплота Q, увеличению на 100% должна соответствовать теплота $2{,}5Q$. Таким образом, для растапливания оставшейся части айсберга пиратам потребуется

$$2{,}5Q - Q = 1{,}5Q = 15 \text{ ТДж}. \tag{29}$$

<u>Ответ:</u> Пиратам потребуется 15 ТДж тепла.

Задача 3. Круглый ящик



Сперва определим схему внутри «чёрного ящика». Предположим, что она имеет вид «звезды» из резисторов R_a, R_b и R_c.

Поскольку напряжение на вольтметре в положении b равно нулю, должно выполняться хотя бы одно из следующих требований:

1. $R_a = \infty$ (разрыв). В этом случае вольтметр ни к чему не подключен.
2. $R_c = \infty$ (разрыв). В этом случае в схеме не течёт ток.
3. $R_b = 0$. В этом случае вольтметр подключен параллельно участку цепи с нулевым сопротивлением.

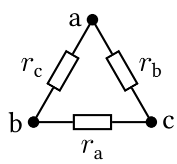
Поскольку в положениях a и c амперметр показывает ненулевой ток, первые два варианта невозможны, значит $R_b = 0$.

Запишем закон Ома для положения a:

$$10\ \text{А} = \frac{20\ \text{В}}{1\ \text{Ом} + R_a} \quad \Rightarrow \quad R_a = \frac{20\ \text{В}}{10\ \text{А}} - 1\ \text{Ом} = 1\ \text{Ом}. \tag{30}$$

Запишем закон Ома для положения c:

$$4\ \text{А} = \frac{20\ \text{В}}{1\ \text{Ом} + R_a + R_c} \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{20\ \text{В}}{4\ \text{А}} - R_a - 1\ \text{Ом} = 3\ \text{Ом}. \tag{31}$$



Нетрудно убедиться, что альтернативный вариант — схема «треугольник» — приведёт к тому же результату (получится $r_b = \infty$ (разрыв)). Любую схему из резисторов с тремя выводами можно без труда свести эквивалентными преобразованиями к уже рассмотренным.

Теперь найдём показание амперметра в положении b, используя закон Ома:

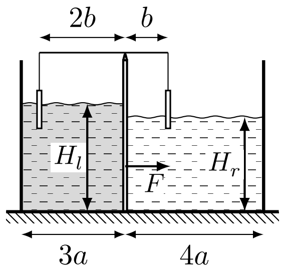
$$I_b = \frac{20\ \text{В}}{1\ \text{Ом} + R_c} = 5\ \text{А}. \tag{32}$$

Показания вольтметра в положениях a и c легко найти, зная токи через амперметр и сопротивления резисторов:

$$U_a = I_a R_a = 10\ \text{А} \cdot 1\ \text{Ом} = 10\ \text{В}, \qquad U_c = I_c R_c = 4\ \text{А} \cdot 3\ \text{Ом} = 12\ \text{В}. \tag{33}$$

Ответ: $I_b = 5$ А, $U_a = 10$ В, $U_c = 12$ В.

Задача 4. Безупречный баланс



Объёмы жидкостей равны, поэтому, учитывая прямоугольную форму сосуда, имеем

$$3aDH_l = 4aDH_r \quad \Rightarrow \quad \frac{H_l}{H_r} = \frac{4}{3}, \tag{34}$$

где D — ширина сосуда перпендикулярно плоскости рисунка, а H_l и H_r — уровни жидкостей в левой и правой части сосуда соответственно.

Перегородка покоится, значит силы давления жидкостей на неё равны. Сила давления F жидкости плотностью ρ на стенку высоты H и ширины D в поле тяжести g должна выражаться по формуле

$$F = C\rho g D^{\alpha} H^{3-\alpha}, \tag{35}$$

где C — безразмерный коэффициент. Этот результат получен просто из анализа размерностей. Тривиальный мысленный эксперимент фиксирует $\alpha = 1$. Обозначим плотность левой жидкости ρ_l, а правой — ρ_r. Тогда условие равновесия перегородки записывается в виде

$$C\rho_l g D H_l^2 = C\rho_r g D H_r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_l}{\rho_r} = \left(\frac{H_r}{H_l}\right)^2 = \frac{9}{16}. \tag{36}$$

Теперь запишем правило рычага для коромысла. Пусть V — объём поплавка, тогда

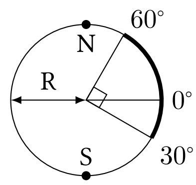
$$2b\left(V \cdot 1\ \text{г/см}^3 - \frac{2}{3}V\rho_l\right) g = b\left(V \cdot 1\ \text{г/см}^3 - \frac{1}{3}V\rho_r\right) g \quad \Rightarrow \quad 4\rho_l - \rho_r = 3\ \text{г/см}^3. \tag{37}$$

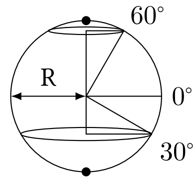
Решая уравнения (36) и (37), получаем

$$\rho_l = \frac{27}{20}\ \text{г/см}^3, \qquad \rho_r = \frac{12}{5}\ \text{г/см}^3. \tag{38}$$

Ответ: Плотность левой жидкости равна $\frac{27}{20}$ г/см^3, а правой — $\frac{12}{5}$ г/см^3.

Задача 5. Бермудский квадрат





Земля, как известно, имеет форму, очень близкую к шарообразной. Обозначим радиус Земли R и разберёмся, какой на самом деле длины сторон «квадрата», изображённого на карте.

Вертикальные линии на карте идут от Северного полюса (верхний край карты) до Южного (нижний край) по кратчайшему пути и образуют полуокружности радиуса R. Таким образом, каждая из вертикальных сторон «квадрата» является дугой радиуса R и угловой меры 90°. Длина такой дуги равна $\pi R/4$.

Горизонтальные линии на карте идут с запада на восток и не пересекаются. Каждая из них лежит в плоскости, параллельной плоскости экватора и образует окружность радиуса $R\cos\varphi$, где φ — угол, отложенный от экватора. Таким образом, верхняя и нижняя стороны «квадрата» являются дугами радиуса $R\cos 60^\circ = R/2$ и $R\cos 30^\circ = \sqrt{3}R/2$ соответственно. Их угловые меры равны 90°, а длины — $\pi R/8$ и $\sqrt{3}\pi R/8$ соответственно.

Получаем, что путь по маршруту DA равен $\pi R/4$, а по маршруту $ABCD$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\pi R + \frac{1}{4}\pi R + \frac{1}{8}\pi R = \frac{3+\sqrt{3}}{8}\pi R. \quad (39)$$

Поскольку скорость самолёта постоянна, время обратного полёта можно найти как

$$T = \frac{\frac{\pi R}{4}}{\frac{3+\sqrt{3}}{8}\pi R} 30 \text{ ч} = 10(3-\sqrt{3}) \text{ ч} \approx 12 \text{ ч } 40 \text{ мин.} \quad (40)$$

Ответ: Полёт обратно займёт приблизительно 12 ч 40 мин.