Возможные решения задач
8 класс

Задача 1. Главное – не переработать

Пусть общее время движения равно t_0. Дима три четверти времени шёл, а оставшееся время бежал, значит

$$3\text{ км} = \frac{1}{4}t_0 \cdot 12\text{ кч/ч} + \frac{3}{4}t_0 \cdot 6\text{ км/ч} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{4 \cdot 3\text{ км}}{12\text{ км/ч} + 3 \cdot 6\text{ км/ч}} = \frac{12}{30}\text{ ч} = 24\text{ мин} \tag{1}$$

Саша бежал $(3/4)$ пути со скоростью 12 км/ч, значит на это у него ушло

$$t_{\text{бег}} = \frac{(3/4) \cdot 3\text{ км}}{12\text{ км/ч}} = \frac{3}{16}\text{ ч} = 11\text{ мин }15\text{ с} \tag{2}$$

а шёл он время

$$t_{\text{шаг}} = \frac{(1/4) \cdot 3\text{ км}}{6\text{ км/ч}} = \frac{1}{8}\text{ ч} = 7\text{ мин }30\text{ с.} \tag{3}$$

Значит время отдыха равно

$$t_{\text{отдых}} = t_0 - t_{\text{шаг}} - t_{\text{бег}} = 24\text{ мин} - 11\text{ мин }15\text{ с} - 7\text{ мин }30\text{ с} = 5\text{ мин }15\text{ с.} \tag{4}$$

Ответ: Саша отдыхал 5 мин 15 с.

№	**Критерий**	**Баллы**
1	Найдено общее время движения 24 мин	1
2	Найдено время бега Саши 11 мин 15 с	1
3	Найдено время шага Саши 7 мин 30 с	1
4	Ответ 5 мин 15 с	1
Сумма		4

Задача 2. Немногоходовочка

Доска находится в равновесии, значит выполняется правило рычага относительно центральной точки. После четвертого хода доска в равновесии, значит массы короля и ферзя равны (все остальные фигуры расположены симметрично относительно центра)

$$m_{\text{король}} = m_{\text{ферзь}}. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим расположение фигур после шестого хода (рис. 1). Для удобства оставим только «несимметричные» относительно центра фигуры (остальные уравновешены). Также как мы уже знаем массы ферзя и короля равны, поэтому король на e8 уравновешивается ферзём на d1. Оставшиеся фигуры представлены на рис. 2. Запишем правило рычага по диагональным осям (a1–h8 и a8–h1), считая, что длина диагонали клетки равна ℓ

$$\begin{cases} m_{\text{пешка}} \cdot \dfrac{1}{2}\ell + m_{\text{король}} \cdot \dfrac{3}{2}\ell = m_{\text{конь}} \cdot \dfrac{1}{2}\ell + m_{\text{ферзь}} \cdot \dfrac{3}{2}\ell. \\ m_{\text{конь}} \cdot \dfrac{3}{2}\ell = m_{\text{ферзь}} \cdot 2\ell + m_{\text{король}} \cdot 2\ell \end{cases} \tag{6}$$

Откуда с учётом (5) следует

$$\begin{cases} m_{\text{пешка}} = m_{\text{конь}} \\ m_{\text{конь}} = \dfrac{8}{3} m_{\text{король}} \end{cases} \Rightarrow m_{\text{пешка}} = \frac{8}{3} m_{\text{король}}. \tag{7}$$

Ответ: пешка тяжелее короля в $(8/3)$ раз.

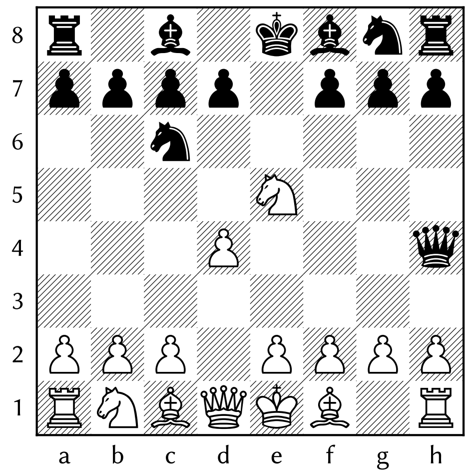


Рис. 1

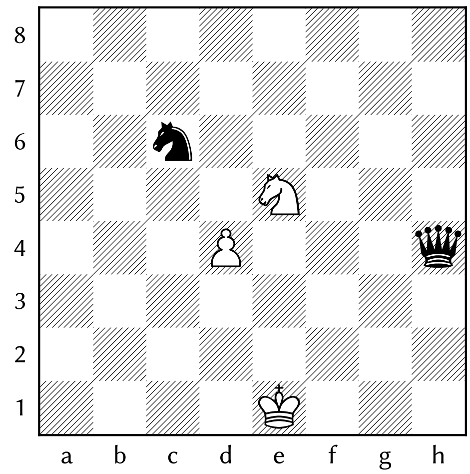


Рис. 2

№	Критерий	Баллы
1	Равенство масс короля и ферзя	1
2	Верное правило рычага для расстановки после шестого хода, записанное по двум осям (по одному за ось).	1+1
3	Ответ $(8/3)$	1
Сумма		4

Задача 3. Пробка

Разберёмся какие силы действуют на конструкцию. Это сила Архимеда, действующая на поплавок, сила давления на пробку со стороны столба жидкости, и, наконец, сила тяжести. Тогда второй закон Ньютона имеет вид

$$F_{\text{тяж}} + p \cdot S_{\text{пр.}} - F_{\text{Арх.}} = 0 \tag{8}$$

то есть

$$Mg + \rho g H \cdot S_{\text{пр.}} - \rho S_{\text{попл.}} h g = 0 \tag{9}$$

Откуда

$$M = \rho \left(S_{\text{попл.}} h - S_{\text{пр.}} H\right) = 1\ \text{г/см}^3 \cdot \left(25\ \text{см}^2 \cdot 10\ \text{см} - 4\ \text{см}^2 \cdot 40\ \text{см}\right) = 90\ \text{г} \tag{10}$$

Подчеркнём, что сила Гука внутренняя, поэтому не входит во второй закон Ньютона для конструкции.
Ответ: масса конструкции 90 г

№	**Критерий**	**Баллы**
1	Второй закон Ньютона для системы. (Если пишется по-отдельности для пробки и поплавка то за каждый из законов ставится по 1 баллу)	2
2	Ответ 70 г	2
Сумма		4

Задача 4. Жизнь насекомых

Первым делом заметим, что конус можно развернуть в плоскость (в этом проще всего убедиться скрутив лист бумаги). Если это сделать, получится сектор круга, причём длина дуги этого круга равна периметру в основании исходного конуса, то есть $2\pi R$. Радиус же этого сектора равен L. Значит угол α развёрнутого конуса равен

$$\alpha = \frac{2\pi R}{2\pi L} \cdot 360^\circ = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ. \tag{11}$$

Для удобства выберем развёртку так, чтобы точка A находилась посередине. Муравьи, расползаясь из точки A, образуют окружность радиуса vt. Первая встреча произойдёт, когда эта окружность коснётся границ развёртки. Расстояние h, которое при этом пройдут муравьи можно найти, исходя из того факта, что в прямоугольном треугольнике катет против угла 30° равен половине гипотенузы, значит $h = (1/2)\ell$. Значит встреча произойдёт через время

$$t = \frac{h}{v} = \frac{1}{2}\frac{\ell}{v} = \frac{1}{2}\frac{36\ \text{см}}{3\ \text{см/с}} = 6\ \text{с}. \tag{12}$$

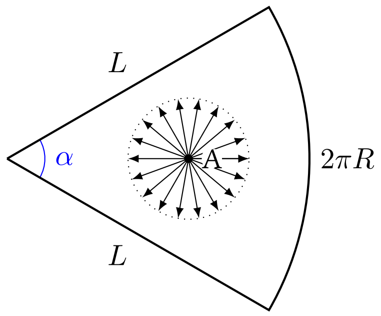


Рис. 3

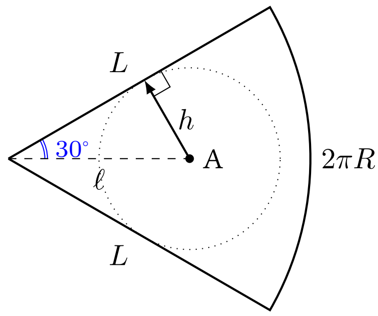
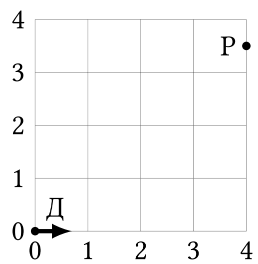


Рис. 4

Ответ: два муравья впервые встретятся через 6 с после старта.

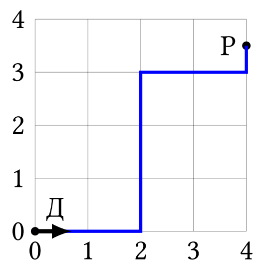
№	Критерий	Баллы
1	Идея о развёртке конуса	1
2	Найден угол получившейся развёртки	1
3	Муравьи заменены на разрастающиеся окружности	1
4	Ответ 6 с	1
Сумма		4

Задача 5. На Манхэттене



Введём координаты для перекрёстков. Мистер Смит всегда едет на восток или север, значит, чтобы приехать на работу, он должен приехать к перекрёстку (4,3) когда светофоры работают в режиме «север-юг». Каким образом он бы не ехал, на его пути будет семь перекрёстков после трёх из которых надо поехать на восток, а после четырёх на север. Причём после последнего перекрёстка обязательно надо ехать на север. Решать задачу будем при помощи графика зависимости пути, пройденного Смитом от времени. Для каждого светофора проведем горизонтальные отрезки, соответствующие времени, когда он работает в режиме «север-юг» (двойная линия).

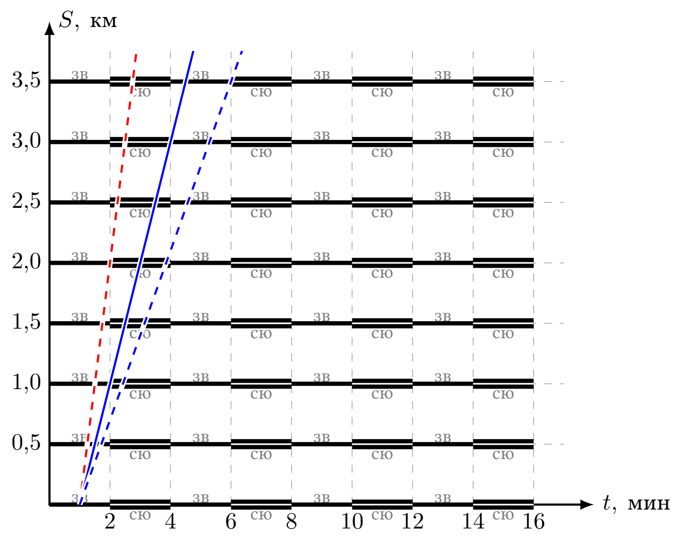
Так как скорость по условию должна быть постоянна, графиком зависимости $S(t)$ для Смита будет прямая. Так же по условию, она выходит из точки $(1, 0)$ и должна пересекать 4 двойные линии, причём последняя пересекаемая линия обязательно должна быть двойной. Первый возможный вариант отмечен на картинке красным пунктиром, однако он не подходит, так как скорость получается равной 120 км/ч. Следующая подходящая прямая будет проходить через $(6, 3{,}5)$. Ей соответствует скорость



$$v = \frac{3{,}5\ \text{км}}{5\ \text{мин}} \tag{13}$$

Расстояние от дома до работы равно 3 750 м Значит Мистер Смит доедет до работы за время

$$t = 3{,}75\ \text{км} \cdot \frac{5\ \text{мин}}{3{,}5\ \text{км}} \approx 5\ \text{мин}\ 20\ \text{с} \tag{14}$$



Ответ: 5 мин 20 с

№	Критерий	Баллы
1	Сказано, что надо проехать три перекрёстка на восток и 4 на север, причём последний обязательно на север	2
2	Нарисован график со светофорами	2
3	Проведена прямая, из правильной точки с правильным количеством пересечений (для любой скорости)	2
4	Ответ 5 мин 20 с	2
Сумма		8

Задача 6. Пироговая

Мощность теплопотерь пропорциональна разности температур между пирогом и окружающей средой, значит за время Δt пирог отдаст в окружающую среду тепло

$$\Delta Q = P \cdot \Delta t = \alpha(T - T_{\text{к}}) \cdot \Delta t, \tag{15}$$

где α некоторый постоянный коэффициент, T — температура пирога, $T_{\text{к}}$ — температура окружающего воздуха. Пусть теплоёмкость пирога C, тогда,

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T \tag{16}$$

значит

$$C \cdot \Delta T = \alpha(T - T_{\text{к}}) \cdot \Delta t. \tag{17}$$

Отсюда можно найти скорость остывания

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha}{C}\left(T - T_{\text{к}}\right). \tag{18}$$

Теперь надо сравнить два процесса остывания с разными температурами воздуха. Заметим, что физический смысл имеет не сама температура, а разность температуры пирога и окружающей среды $\tilde{T} = T - T_{\text{к}}$. Температура воздуха постоянна в каждом из процессов, значит

$$\Delta\tilde{T} = \Delta T \tag{19}$$

Тогда (18) перейдёт в

$$\frac{\Delta\tilde{T}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{C} \cdot \tilde{T}. \tag{20}$$

то есть скорость изменения величины $\tilde{T}$ пропорциональна её значению. Что это значит в контексте нашей задачи? Давайте умножим обе части уравнения на некоторый коэффициент k и воспользуемся тем, что $k\Delta\tilde{T} = \Delta k\tilde{T}$

$$\frac{\Delta(k\tilde{T})}{\Delta t} = \frac{\alpha}{C}(kT). \tag{21}$$

Но уравнение не изменилось. Это значит что значением $\tilde{T}$ уменьшается с $\tilde{T}_1$ до $\tilde{T}_2$ за такое же время, что и значение $k\tilde{T}$ с $k\tilde{T}_1$ до $k\tilde{T}_2$.
Когда пирог остывал в комнате $\tilde{T}$ уменьшилось с 60 °C до 30 °C за 5 минут. Выбрав $k = (4/3)$ в (21) получим, что $\tilde{T}$ падает с 80 °C до 40 °C за 5 мин. Если же выбрать $k = (2/3)$ в (21), получим, что $\tilde{T}$ падает с 40 °C до 20 °C тоже за 5 мин. Значит с 80 °C до 20 °C разность температур упадёт за 10 мин.
Ответ: на балконе пирог остынет за 10 мин

№	Критерий	Баллы
1	Скорость остывания $\frac{\Delta T}{\Delta t} \sim (T - T_{\text{к}})$	2
2	Переход к разности температур пирога и окружающей среды	1
3	Подобие скоростей	3
4	Ответ 10 мин	2
Сумма		8

Задача 7. Как ни крути

Первым делом разберёмся как считать среднюю плотность такой заготовки. Для этого воспользуемся методом размерностей. Понятно, что масса подобной заготовки однозначно задана параметрами a, H и k. Причём несложно заметить, что если сторона a увеличится вдвоё, то масса возрастёт в четыре раза, так как по сути конструкция будет представлять из себя четыре четыре склеенных бруска. Значит

$$m \sim a^2 \cdot k^\alpha \cdot H^\beta. \tag{22}$$

Размерности величин

$$[m] = \text{кг}, \qquad [k] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^4}, \qquad [H] = \text{м}, \tag{23}$$

значит единственный способ получить величину размерности массы это

$$m \sim a^2 k H^2. \tag{24}$$

Средняя плотность заготовки

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{a^2 H} \sim kH \tag{25}$$

Таким образом средние плотности заготовки сточенной до $(9/10)H$ и до $(1/2)H$ равны $\rho_1 = 0{,}9$ г/см^3 и $\rho_2 = 0{,}5$ г/см^3 соответственно.

Перейдём к нахождению глубины погружения бруска. Заметим, что устойчивым положением равновесия будет то, в котором центр масс системы «брусок+вода» ниже. По этой причине, брусок не может плавать вертикально и перевернётся на бок, если его поместить в воду. Действительно, брусок легче воды, значит центр масс системы «брусок+вода» при горизонтальном положении находится ниже, чем при вертикальном. Наглядный пример этого факта — брёвна плывущие по реке.

Однако при горизонтальном плавании бруска с квадратным сечением есть два положения равновесия. Мы будем условно называть их «квадрат» и «ромб». Для плотности $\rho = 0{,}9$ г/см^3 они представлены на рисунке 5, а для плотности $\rho = 0{,}5$ г/см^3 на рисунке 6.

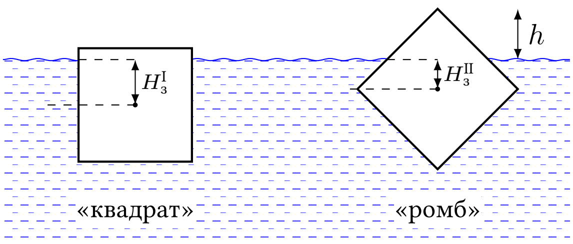


Рис. 5

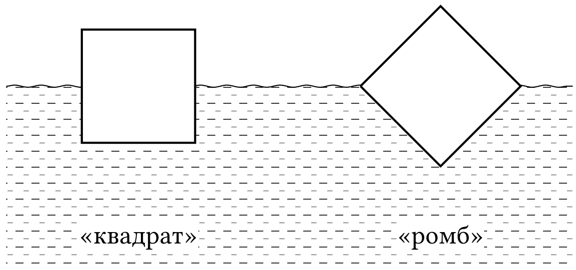


Рис. 6

Чтобы понять какое из положений равновесия будет устойчивым надо найти положение центра масс. Средняя плотность заготовки равна $0{,}9$ г/см^3, значит над водой находится одна десятая часть её объёма. То есть в положении «квадрат» заготовка выступает из воды на $h = (1/9)a$, а в положении «ромб» на

$$\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{10}a^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{5}}a. \tag{26}$$

Значит глубина центра масс заготовки $H_з^I$

$$H_з^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{10}a = 0{,}40a, \qquad H_з^{\mathrm{II}} = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{5}} \approx 0{,}26a. \tag{27}$$

Теперь найдём центр масс вытесняемой воды. В положении «квадрат» центр масс вытесненной воды находится на глубине

$$H_в^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}a = 0{,}45a. \tag{28}$$

Чтобы найти глубину погружения центра масс вытесненной воды в положении «ромб» можно представить фигуру как наложение двух: квадрата массой m и треугольника массой $-m/10$ (рисунок 7).

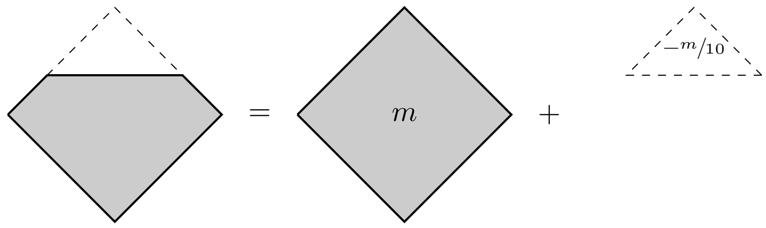


Рис. 7

Центр масс квадрата находится на глубине $\frac{\sqrt{2}}{2}a - h$, а треугольника — на высоте $h/3$ над уровнем воды. Значит глубина центра масс вытесненной воды

$$H_{\text{в}}^{\text{II}} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - h\right) \approx 0{,}27a \tag{29}$$

Получили, что и центр масс вытесненной воды и центр масс заготовки в первом положении ниже, чем во втором. Значит именно оно будет устойчивым и брусок будет погружен на $9/10 = 4{,}5$ см
Для плотности $\rho = 0{,}5$ г/см^3 эти два положения равновесия представлены на 6. Однако здесь центр масс заготовки и в первом и втором положении находится на уровне воды. Значит важна только глубина центра масс вытесненной воды. Она равна

$$H_{\text{в}}^{\text{I}} = \frac{1}{4}a, \qquad H_{\text{в}}^{\text{II}} = \frac{1}{3}d = \frac{\sqrt{2}}{6}a \approx 0{,}23a. \tag{30}$$

Видно, что $H_{\text{в}}^{\text{I}} > H_{\text{в}}^{\text{II}}$, значит устойчивым будет второе положение. Значит глубина погружения заготовки равна половине диагонали, то есть $a/\sqrt{2} \approx 3{,}5$ см.
Ответ: $4{,}5$ см и $3{,}5$ см

№	**Критерий**	**Баллы**
1	Найдена средняя плотность или масса в зависимости от длины заготовки.	1
2	Указано, что брусок переворачивается в горизонтальное положение	1
3	Указано, что есть два возможных положения равновесия (квадрат и ромб)	1
4	Указано правильное положение равновесие для случая $(9/10)L$, $(1/2)L$	1+2
5	Найдена глубина погружения для случая $(9/10)L$, $(1/2)L$ 4,5 см и 3,5 см	1+1
Сумма		8

Примечение: доказательство того факта, что при плотности $\rho = 0{,}9$ г/см^3 положение «квадрат» устойчиво, не требуется.