Возможные решения задач
8 класс
1-й вариант

Задача 1. Покрутим ещё

На систему из трёх кубиков действуют сила тяжести и сила Архимеда. Пирамидка находится в равновесии, значит

$$F_{\text{Арх.}} = F_{\text{тяж.}} \tag{1}$$

Согласно условию объём погруженной части равен объёму кубика со стороной $3a$, то есть

$$F_{\text{Арх.}} = (3a)^3 \rho g. \tag{2}$$

Когда пирамидку перевернут, сила тяжести не изменится. Поэтому объём погруженной части снова будет равен $27a^3$. Объём двух маленьких кубиков равен

$$a^3 + (2a)^3 = 9a^3. \tag{3}$$

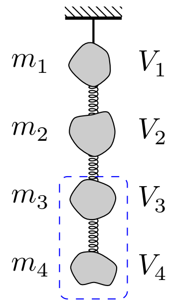
Значит большой кубик будет погружен на $27a^3 - 9a^3 = 18a^3$, то есть на $^2/_3$ своего объёма, а значит и на $^2/_3$ высоты. Следовательно пирамидка погрузится на

$$a + 2a + {}^2/_3 \cdot (3a) = 5a. \tag{4}$$

Ответ: Пирамидка будет погружена на $5a$.

Задача 2. Два растяжения

Запишем второй закон Ньютона для системы из двух нижних грузиков. В воздухе действуют две силы: сила тяжести и сила Гука, причём система в равновесии, значит эти силы равны



$$F_{\text{Гук}} = k\Delta x = F_{\text{тяж.}} = (m_3 + m_4)g = \rho\left(V_3 + V_4\right)g. \tag{5}$$

Если же систему погрузить в воду, добавится сила Архимеда

$$k\Delta x' = F_{\text{тяж.}} - F_{\text{Арх.}} = \rho\left(V_3 + V_4\right) - \rho_{\text{в}}\left(V_3 + V_4\right). \tag{6}$$

Таким образом

$$\frac{x'}{x} = \frac{\rho - \rho_{\text{в}}}{\rho} = 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Значит в воде удлинение пружины будет равно

$$x' = \frac{1}{2}x = 1 \text{ см}. \tag{8}$$

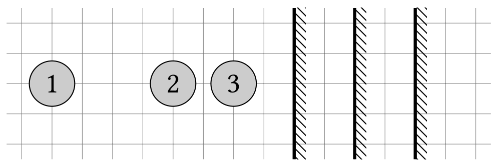
Ответ: удлинение пружины в воде равно 1 см

Задача 3. Склеенные кадры

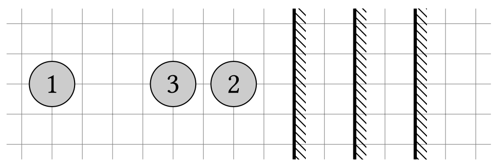
Пускай скорость шарика равна v, а скорость стенки u. Разберёмся, каким образом меняется скорость шарика в результате отскока. Для этого перейдём в систему отсчёта стенки. В ней стенка покоится, а шарик летит со скоростью $v + u$. По условию, в результате отскока скорость шарика меняется на противоположную, то есть в системе отсчёта стенки она равна $u + v$ и направлена влево. А значит в системе отсчёта наблюдателя, скорость шарика будет равна $v + 2u$.

Заметим, что скорость стенки легко определить по картинке. Действительно, за секунду стенка проходит 2 клетки, значит её скорость равна $u = 2$ кл/с.

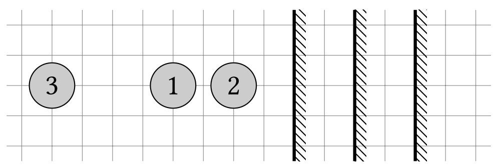
Теперь надо сопоставить положения шариков с номерами снимков. Всего есть четыре возможных варианта. Вообще говоря, вариантов шесть, но два не подходят потому, что шарик по условию летит вправо.



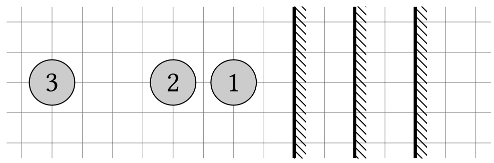
В первом случае столкновение произошло между вторым и третьим кадром, а скорость шарика равна $v = 4$ кл/с. В момент, когда был сделан второй кадр, расстояние между шариком и стенкой равно 6 кл. Значит удар произойдёт через $t = \frac{6\text{ кл}}{4\text{ кл/с}+2\text{ кл/с}} = 1$ с, то есть в момент третьего кадра, что не совпадает с результатом проявления фотографии из условия.



Во втором случае столкновение тоже произошло между вторым и третьим кадром, но скорость шарика равна $v = 6$ кл/с. В момент, когда был сделан второй кадр, расстояние между шариком и стенкой равно 4 кл. Значит удар произойдёт через $t = \frac{4\text{ кл}}{6\text{ кл/с}+2\text{ кл/с}} = (1/2)$ с, После этого шарик будет еще полсекунды двигаться со скоростью $6\text{ кл/с} + 2 \cdot 2\text{ кл/с} = 10$ кл/с, то есть сместится ещё на пять клеток влево. Это совпадает с результатом проявления фотографии из условия. То есть нашли один подходящий вариант, в котором скорость шарика в 3 раза больше скорости стены.



В третьем случае столкновение произошло между вторым и третьим кадром, а скорость шарика равна $v = 2$ кл/с. В момент, когда был сделан второй кадр, расстояние между шариком и стенкой равно 4 кл. Значит удар произойдёт через $t = \frac{4\text{ кл}}{2\text{ кл/с}+2\text{ кл/с}} = 1$ с, то есть в момент третьего удара, что не подходит по условию.



Во последним случае столкновение произошло между первым и вторым кадром, а скорость шарика после отскока равна $V = 4$ кл/с. А значит его начальная скорость равна $v = V - 2u = 0$ кл/с. Расстояние между шариком и стеной в начальный момент равно 6 кл. Значит только через три секунды стенка столкнётся с шариком, что не соответствует условию.

В итоге получили, что возможен только один вариант, и скорость налетающего шарика в 3 раза больше скорости стенки.

Ответ: скорость шарика в 3 раза больше скорости стенки.

Задача 4. Пудинг Минковского

Теплота, переданная телу связана с изменением температуры как

$$Q = cm\Delta T = c\rho V\Delta T, \tag{9}$$

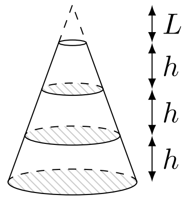
где c — удельная теплоёмкость материала, m,ρ,V— масса плотность и объём тела соответственно.

Конус, однозначным образом задаётся углом раствора и высотой. Из соображений размерности, можно сделать вывод, что объём конуса зависит от его высоты как

$$V = kH^3 \tag{10}$$

где k — некоторый неизвестный безразмерный коэффициент, который зависит от угла раствора конуса.

Пусть расстояние от верхней части пудинга до вершины конуса равно L. Тогда объёмы частей равны



$$\begin{aligned} V_1 &= k(h+L)^3 - kL^3 \\ V_2 &= k(2h+L)^3 - k(h+L)^3 \\ V_3 &= k(3h+L)^3 - k(2h+L)^3 \end{aligned} \tag{11}$$

По условию, если передать верхней части 100 Дж, то она нагреется на 3 °C, а если передать такое же тепло средней части она нагреется на 1 °C. Значит объём верхней части в три раза меньше, чем объём средней. С другой стороны

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(h+L)^3 - L^3}{(2h+L)^3 - (h+L)^3} = \frac{3hL^2 + 3h^2L + h^3}{3(2h)L^2 + 3(2h)^2L + (2h)^3 - 3hL^2 - 3h^2L - h^3} =$$

$$= \frac{3(h/L) + 3(h/L)^2 + (h/L)^3}{3(h/L) + 9(h/L)^2 + 7(h/L)^3} = \frac{1}{3} \tag{12}$$

Отсюда

$$3 + 3(h/L) + (h/L)^2 = 1 + 3(h/L) + \frac{7}{3}(h/L)^2 \tag{13}$$

значит

$$2 = \frac{4}{3}(h/L)^2 \Rightarrow (h/L) = \sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{14}$$

Найдём теперь какую часть от пудинга составляет верхняя часть

$$\frac{V_1}{V_1+V_2+V_3} = \frac{(h+L)^3 - L^3}{(3h+L)^3 - L^3} = \frac{3(h/L) + 3(h/L) + (h/L)^3}{3(3\cdot h/L) + 3(3\cdot h/L)^2 + (3\cdot h/L)^3} = \frac{3 + 3(h/L) + (h/L)^2}{9 + 27(h/L) + 27(h/L)^2} \tag{15}$$

С учётом (14) это отношение равно

$$\frac{V_1}{V_1+V_2+V_3} = \frac{3 + 3\sqrt{3/2} + 3/2}{9 + 27\sqrt{3/2} + 27\cdot 3/2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3/2 + \sqrt{3/2}}{11/2 + 3\sqrt{3/2}} \approx 0{,}1 \tag{16}$$

Получается, что для того, чтобы нагреть большой пудинг на 1 °Стребуется в 10 раз больше тепла, чем для того, чтобы нагреть его верхнюю часть. А значит для того, чтобы нагреть большой пудинг на 12 °C требуется в 40 раз больше Q, то есть 4 кДж.

$$Q = 10\cdot 100\ \text{Дж}\cdot\frac{12\ ^\circ\text{C}}{3\ ^\circ\text{C}} = 4\ \text{кДж}. \tag{17}$$

Ответ: для того, чтобы нагреть большой пудинг потребуется 4 кДж.

Задача 5. Средняя температура

Средняя температура посчитанная прибором 24 октября в 03:00 равна

$$T_{\text{ср, 24.10 03}} = \frac{1}{8}\left(T_{\text{24.10 03}} + T_{\text{24.10 00}} + T_{\text{23.10 21}} + T_{\text{23.10 18}} + T_{\text{23.10 15}} + T_{\text{23.10 12}} + T_{\text{23.10 09}} + T_{\text{23.10 06}}\right) \tag{18}$$

а средняя температура, посчитанная прибором 24 октября в 00:00

$$T_{\text{ср, 24.10 00ч}} = \frac{1}{8}\left(T_{\text{24.10 00}} + T_{\text{23.10 21}} + T_{\text{23.10 18}} + T_{\text{23.10 15}} + T_{\text{23.10 12}} + T_{\text{23.10 09}} + T_{\text{23.10 06}} + T_{\text{23.10 03}}\right) \tag{19}$$

Значит их разность

$$T_{\text{ср, 24.10 03}} - T_{\text{ср, 24.10 00}} = \frac{1}{8}\left(T_{\text{24.10 03}} - T_{\text{23.10 03}}\right) \tag{20}$$

Значит температура, которая была на улице 23 октября в 03:00 равна

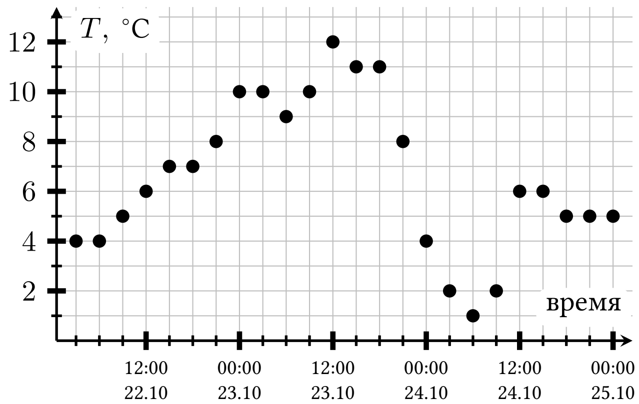
$$T_{\text{23.10 03}} = T_{\text{24.10 03}} - 8\left(T_{\text{ср, 24.10 03}} - T_{\text{ср, 24.10 00}}\right) \tag{21}$$

Все величины в правой части можно снять из графиков, которые даны в условии. В результате

$$T_{\text{23.10 03}} = 2\ ^\circ\text{C} - 8\,(8{,}375\ ^\circ\text{C} - 9{,}375\ ^\circ\text{C}) = 10\ ^\circ\text{C} \tag{22}$$

Ответ: 23 октября в 03:00 на улице было 10 °C

Примечание: предложенным способом можно восстановить температуру, которая была 23 октября целиком. Результат представлен на графике



Возможные решения задач

8 класс

2-й вариант

Задача 1. Покрутим ещё

На систему из трёх кубиков действуют сила тяжести и сила Архимеда. Пирамидка находится в равновесии, значит

$$F_{\text{Арх.}} = F_{\text{тяж.}} \tag{23}$$

Согласно условию объём погруженной части равен объёму двух кубиков со сторонами a и $2a$, то есть

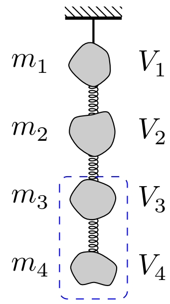
$$F_{\text{Арх.}} = \left(a^3 + (2a)^3\right)\rho g. \tag{24}$$

Когда пирамидку перевернут, сила тяжести не изменится. Поэтому объём погруженной части снова будет равен $9a^3$. Значит большой кубик будет погружен на $^1/_3$ своего объёма, а значит и на $^1/_3$ высоты. Следовательно пирамидка погрузится на

$$\frac{1}{3} \cdot 3a = a \tag{25}$$

Ответ: пирамидка будет погружена на a.

Задача 2. Два растяжения



Запишем второй закон Ньютона для системы из двух нижних грузиков. В воздухе действуют две силы: сила тяжести и сила Гука, причём система в равновесии, значит эти силы равны

$$F_{\text{Гук}} = k\Delta x = F_{\text{тяж.}} = (m_3 + m_4)g = \rho\left(V_3 + V_4\right)g. \tag{26}$$

Если же систему погрузить в воду, добавится сила Архимеда

$$k\Delta x' = F_{\text{тяж.}} - F_{\text{Арх.}} = \rho\left(V_3 + V_4\right) - \rho_{\text{в}}\left(V_3 + V_4\right). \tag{27}$$

Таким образом

$$\frac{x'}{x} = \frac{\rho - \rho_{\text{в}}}{\rho} = 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho} = \frac{2}{3}. \tag{28}$$

Значит в воде удлинение пружины будет равно

$$x' = \frac{2}{3}x = 2\text{ см}. \tag{29}$$

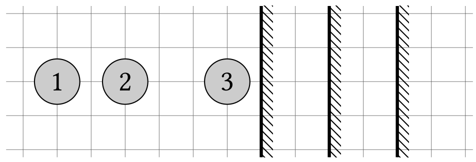
Ответ: удлинение пружины в воде равно 2 см

Задача 3. Склеенные кадры

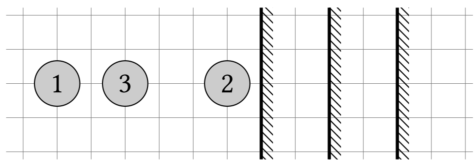
Пускай скорость шарика равна v, а скорость стенки u. Разберёмся, каким образом меняется скорость шарика в результате отскока. Для этого перейдём в систему отсчёта стенки. В ней стенка покоится, а шарик летит со скоростью $v+u$. По условию, в результате отскока скорость шарика меняется на противоположную, то есть в системе отсчёта стенки она равна $u+v$ и направлена влево. А значит в системе отсчёта наблюдателя, скорость шарика будет равна $v+2u$.

Заметим, что скорость стенки легко определить по картинке. Действительно, за секунду стенка проходит 2 клетки, значит её скорость равна $u = 2$ кл/с.

Теперь надо сопоставить положения шариков с номерами снимков. Всего есть четыре возможных варианта. Вообще говоря, вариантов шесть, но два не подходят потому, что шарик по условию летит вправо.



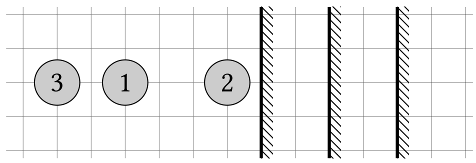
В первом случае столкновение произошло между вторым и третьим кадром, а скорость шарика равна $v = 2$ кл/с. В момент, когда был сделан второй кадр, расстояние между шариком и стенкой равно 6 кл. Значит удар произойдёт через $t = \frac{6\text{ кл}}{2\text{ кл/с}+2\text{ кл/с}} = (3/2)$ с, то есть уже после третьего кадра, что не совпадает с результатом проявления фотографии из условия.



Во втором случае столкновение тоже произошло между вторым и третьим кадром, но скорость шарика равна $v = 5$ кл/с. В момент, когда был сделан второй кадр, расстояние между шариком и стенкой равно 3 кл. Значит удар произойдёт через $t = \frac{3\text{ кл}}{5\text{ кл/с}+2\text{ кл/с}} = (3/7)$ с. После этого шарик ещё $(4/7)$ с будет двигаться влево со скоростью 5 кл/с $+ 2 \cdot 2$ кл/с $= 9$ кл/с. То есть шарик на третьем снимке должен быть на

$$S = 9\text{ кл/с} \cdot (4/7)\text{ с} - 5\text{ кл/с} \cdot (3/7)\text{ с} = 3\text{ кл} \tag{30}$$

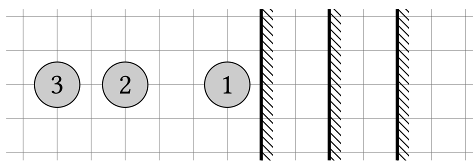
левее, чем на втором. Это совпадает с результатом проявления фотографии. Значит нашли подходящий вариант, в котором скорость шарика в 2,5 раза больше скорости стены.



В третьем случае столкновение произошло между вторым и третьим кадром, а скорость шарика равна $v = 3$ кл/с. В момент, когда был сделан второй кадр, расстояние между шариком и стенкой равно 1 кл. Значит удар произойдёт через $t = \frac{1\text{ кл}}{2\text{ кл/с}+2\text{ кл/с}} = (1/4)$ с. После этого шарик ещё $(3/4)$ с будет двигаться влево со скоростью 3 кл/с $+ 2 \cdot 2$ кл/с $= 7$ кл/с. То есть шарик на третьем снимке должен быть на

$$S = 7\text{ кл/с} \cdot (3/4)\text{ с} - 3\text{ кл/с} \cdot (1/4)\text{ с} = (9/2)\text{ кл} \tag{31}$$

левее, чем на втором. Это не совпадает с результатом проявления фотографии.



Во последним случае столкновение произошло между первым и вторым кадром, а скорость шарика после отскока равна $V = 2$ кл/с. А значит его начальная скорость равна $v = V - 2u = -2$ кл/с. Значит шарик летел влево, что не соответствует условию.

В итоге получили, что возможен только один вариант, и скорость налетающего шарика в 2,5 раза больше скорости стенки.

Ответ: скорость шарика в 2,5 раза больше скорости стенки.

Задача 4. Пудинг Минковского

Теплота, переданная телу связана с изменением температуры как

$$Q = cm\Delta T = c\rho V\Delta T, \tag{32}$$

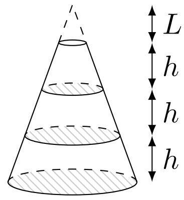
где c — удельная теплоёмкость материала, m,ρ,V — масса плотность и объём тела соответственно.

Конус, однозначным образом задаётся углом раствора и высотой. Из соображений размерности, можно сделать вывод, что объём конуса зависит от его высоты как

$$V = kH^3 \tag{33}$$

где k — некоторый неизвестный безразмерный коэффициент, который зависит от угла раствора конуса.

Пусть расстояние от верхней части пудинга до вершины конуса равно L. Тогда объёмы частей равны



$$\begin{aligned} V_1 &= k(h+L)^3 - kL^3 \\ V_2 &= k(2h+L)^3 - k(h+L)^3 \\ V_3 &= k(3h+L)^3 - k(2h+L)^3 \end{aligned} \tag{34}$$

По условию, если передать средней части 600 Дж, то она нагреется на 5 °C, а если передать такое же тепло нижней части она нагреется на 3 °C. Значит объёмы средней и нижней части относятся как 3:5. С другой стороны

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{(2h+L)^3 - (h+L)^3}{(3h+L)^3 - (2h+L)^3} = \frac{3(2h)L^2 + 3(2h)^2L + (2h)^3 - 3hL^2 - 3h^2L - h^3}{3(3h)L^2 + 3(3h)^2L + (3h)^3 - 3(2h)L^2 - 3(2h)^2L - (2h)^3} =$$
$$= \frac{3(h/L) + 9(h/L)^2 + 7(h/L)^3}{3(h/L) + 15(h/L)^2 + 19(h/L)^3} = \frac{3}{5} \tag{35}$$

Отсюда

$$5\left(3 + 9(h/L) + 7(h/L)^2\right) = 3\left(3 + 15(h/L) + 19(h/L)^2\right) \tag{36}$$

значит

$$6 = 22(h/L)^2 \Rightarrow (h/L) = \sqrt{\frac{3}{11}}. \tag{37}$$

Найдём теперь какую часть от пудинга составляет нижняя часть

$$\frac{V_3}{V_1+V_2+V_3} = \frac{(3h+L)^3 - (2h+L)^3}{(3h+L)^3 - L^3} = \frac{3(h/L) + 9(h/L) + 7(h/L)^3}{3(3\cdot h/L) + 3(3\cdot h/L)^2 + (3\cdot h/L)^3} = \frac{3 + 15(h/L) + 19(h/L)^2}{9 + 27(h/L) + 27(h/L)^2} \tag{38}$$

С учётом (37) это отношение равно

$$\frac{V_3}{V_1+V_2+V_3} = \frac{3 + 9\sqrt{3/11} + 7\cdot 3/11}{9 + 27\sqrt{3/11} + 27\cdot 3/11} = \frac{1}{3}\frac{30/11 + 5\cdot\sqrt{3/11}}{20/11 + 3\cdot\sqrt{3/11}} \approx 0{,}5 \tag{39}$$

Получается, что для того, чтобы нагреть большой пудинг на 1 °Cтребуется в 2 раз больше тепла, чем для того, чтобы нагреть его нижнюю часть. А значит для того, чтобы нагреть большой пудинг на 12 °C требуется в 8 раз больше Q, то есть 4,8 кДж.

$$Q = 2\cdot 600\text{ Дж}\cdot\frac{12\text{ °C}}{3\text{ °C}} = 4{,}8\text{ кДж}. \tag{40}$$

Ответ: для того, чтобы нагреть большой пудинг потребуется 4,8 кДж.

Задача 5. Средняя температура

Средняя температура посчитанная прибором 24 октября в 09:00 равна

$$T_{\text{ср, 24.10 09}} = \frac{1}{8}\left(T_{\text{24.10 09}} + T_{\text{24.10 06}} + T_{\text{24.10 03}} + T_{\text{24.10 00}} + T_{\text{23.10 21}} + T_{\text{23.10 18}} + T_{\text{23.10 15}} + T_{\text{23.10 12}}\right) \tag{41}$$

а средняя температура, посчитанная прибором 24 октября в 06:00

$$T_{\text{ср, 24.10 06}} = \frac{1}{8}\left(T_{\text{24.10 06}} + T_{\text{24.10 03}} + T_{\text{24.10 00}} + T_{\text{23.10 21}} + T_{\text{23.10 18}} + T_{\text{23.10 15}} + T_{\text{23.10 12}} + T_{\text{23.10 09}}\right) \tag{42}$$

Значит их разность

$$T_{\text{ср, 24.10 09}} - T_{\text{ср, 24.10 06}} = \frac{1}{8}\left(T_{\text{24.10 09}} - T_{\text{23.10 06}}\right) \tag{43}$$

Значит температура, которая была на улице 23 октября в 09:00 равна

$$T_{\text{23.10 09}} = T_{\text{24.10 09}} - 8\left(T_{\text{ср, 24.10 09}} - T_{\text{ср, 24.10 06}}\right) \tag{44}$$

Все величины в правой части можно снять из графиков, которые даны в условии. В результате

$$T_{\text{23.10 09}} = 2\,^{\circ}\text{C} - 8\,(6{,}375\,^{\circ}\text{C} - 7{,}375\,^{\circ}\text{C}) = 10\,^{\circ}\text{C} \tag{45}$$

Ответ: 23 октября в 09:00 на улице было 10 °C

Примечание: предложенным способом можно восстановить температуру, которая была 23 октября целиком. Результат представлен на графике