Возможные решения задач
7 класс

Задача 1. Две половинки

Обозначим объёмы половинок V_1 и V_2. Масса каждой половинки m.
Если тело плавает, то его средняя плотность не больше плотности воды. А значит можно написать неравенство

$$\frac{2m}{V_1+V_2} \leqslant \rho_\text{в}. \tag{1}$$

В дальнейшем будет удобнее воспользоваться перевернутой версией этого неравенства

$$\frac{V_1+V_2}{2m} \geqslant \frac{1}{\rho_\text{в}}. \tag{2}$$

Из условия равновесия плавающей половинки можно вычислить её плотность

$$mg = F_\text{арх} = \rho_\text{в}\frac{3}{4}V_1 g, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{V_1} = \frac{3}{4}\rho_\text{в}. \tag{3}$$

Этот результат можно подставить в неравенство (2) вместе с обозначением $\rho = \frac{m}{V_2}$ для искомой плотности второй половинки

$$\frac{2}{3}\frac{1}{\rho_\text{в}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho} \geqslant \frac{1}{\rho_\text{в}}. \tag{4}$$

Преобразовывая, получаем

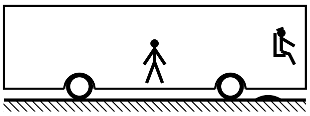
$$\rho \leqslant \frac{1}{2\frac{1}{\rho_\text{в}} - \frac{4}{3}\frac{1}{\rho_\text{в}}} = \frac{3}{2}\rho_\text{в}. \tag{5}$$

Значит максимально возможная плотность второй половинки равна $1{,}5$ г/см^3.

<u>Ответ:</u> Максимально возможная плотность второй половинки равна $1{,}5$ г/см^3.

№	Критерий	Баллы
1	Найдена плотность плавающей половинки, $0{,}75$ г/см^3.	1
2	Приведено условие плавучести (1).	2
3	Получен верный ответ $1{,}5$ г/см^3.	1
Сумма		4

Задача 2. Лежачий полицейский



Пусть расстояние между колесами автобуса будет равно L, а расстояние от переднего колеса до водителя будет равно ℓ. Высоту искусственной неровности обозначим h.

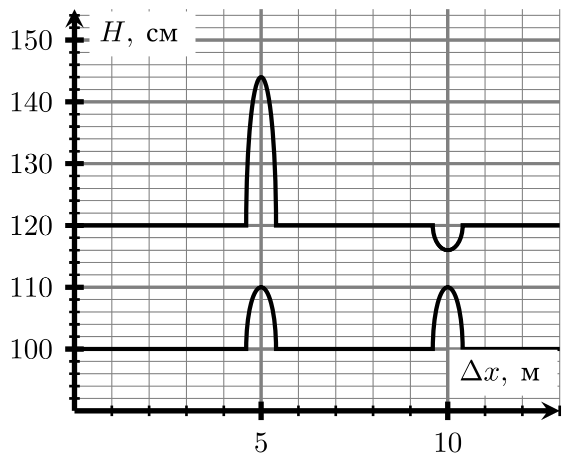
Рассмотрим момент, когда автобус переезжает неровность передним колесом. В этот момент переднее колесо находится на h выше заднего. Из подобия треугольников и, вспоминая, что пассажир по условию стоит ровно посередине между колесами, можно найти, что высота подъёма пассажира — $H_{\text{п}}^{(1)}$ и высота подъёма водителя — $H_{\text{в}}^{(1)}$ в этом случае равны

$$H_{\text{п}}^{(1)} = \frac{L/2}{L} h = \frac{h}{2}, \qquad H_{\text{в}}^{(1)} = \frac{L+\ell}{L} h. \tag{6}$$

Аналогично рассмотрим второй момент, когда автобус переезжает неровность задним колесом. В этот момент заднее колесо на h выше переднего, а тогда из подобия треугольников аналогичные высоты $H_{\text{п}}^{(2)}$ и $H_{\text{в}}^{(2)}$ равны

$$H_{\text{п}}^{(1)} = \frac{L/2}{L} h = \frac{h}{2}, \qquad H_{\text{в}}^{(1)} = -\frac{\ell}{L} h. \tag{7}$$

Как видно из формул (1) и (2) высота подъёма пассажира всегда в два раза меньше высоты неровности. Кроме того можно заметить, что расстояние между пиками на графике примерно равно расстоянию между колесами автобуса, так как неровность невысокая. Тогда из графика находим, что



$$H_{\text{п}}^{(1,2)} = 10 \text{ см}, \quad H_{\text{в}}^{(1)} = 24 \text{ см}, \tag{8}$$

$$L = 5 \text{ м}, \qquad H_{\text{в}}^{(2)} = -4 \text{ см}. \tag{9}$$

После этого, пользуясь формулами (1) или (2), можно вычислить

$$h = 20 \text{ см}, \quad \ell = 1 \text{ м}. \tag{10}$$

А расстояние между водителем и пассажиром будет равно

$$D = L/2 + \ell = 3{,}5 \text{ м}. \tag{11}$$

Ответ: Расстояние между водителем и пассажиром равно 3,5 м.

№	Критерий	Баллы
1	Найдено расстояние между колесами автобуса.	1
2	Идея подобия.	1
3	Получен верный ответ 3,5 м.	2
Сумма		4

Задача 3. Бактерии в зуме

Обозначим ширину видимой области за ℓ. Очевидно, что количество видимых бактерий N пропорционально видимой площади, то есть ℓ^2. Поскольку скорость бактерий постоянна, время пробега одного деления t пропорционально длине деления. В условии сказано, что шкала микроскопа не зависит от увеличения, поэтому длина деления пропорциональна ℓ. Получаем, что N пропорционально t^2. Запишем пропорцию для измерений Коли ($N_{\text{К}}$, 20 с) и Пети (100 шт., 10 с):

$$\frac{N_{\text{К}}}{100\ \text{шт.}} = \frac{(20\ \text{с})^2}{(10\ \text{с})^2}. \tag{12}$$

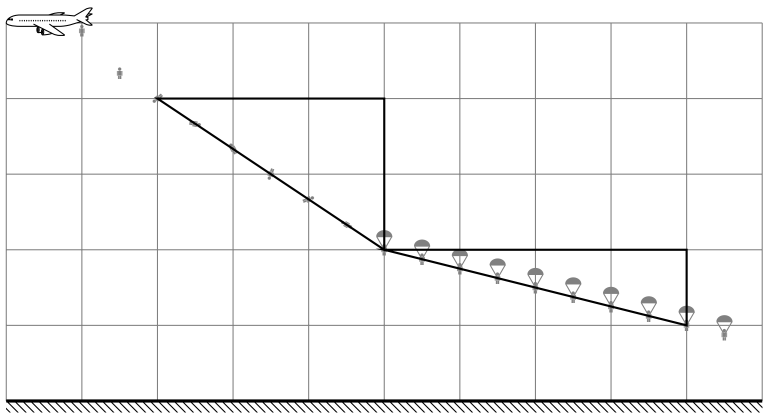
Решаем пропорцию:

$$N_{\text{К}} = \frac{(20\ \text{с})^2}{(10\ \text{с})^2} \cdot 100\ \text{шт.} = 4 \cdot 100\ \text{шт.} = 400\ \text{шт.} \tag{13}$$

Ответ: Коля насчитает 400 бактерий.

№	Критерий	Баллы
1	Количество бактерий связано с масштабом.	1
2	Время пробега деления связано с масштабом.	1
3	Получен ответ.	2
Сумма		4

Задача 4. ВДv



Обозначим скорость самолёта за w. Чтобы связать его движение с падением парашютистов, рассмотрим два прямоугольных треугольника (см. рис.). Из левого треугольника видно, что падение парашютиста со скоростью u на две клетки вниз и смещение самолёта со скоростью w на три клетки влево заняли одинаковое время. Значит,

$$\frac{u}{w} = \frac{2}{3}. \tag{14}$$

Из правого треугольника видно, что спуск парашютиста со скоростью v на одну клетку и смещение самолёта со скоростью w на пять клеток влево также заняли одинаковое время. Значит,

$$\frac{w}{v} = 4. \tag{15}$$

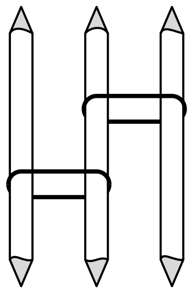
Перемножая получившиеся дроби, получим

$$\frac{u}{v} = \frac{u}{w} \cdot \frac{w}{v} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}. \tag{16}$$

Ответ: Отношение $^u/_v$ равно $^8/_3$.

№	Критерий	Баллы
1	Скорости парашютистов связаны со скоростью самолёта.	1+1
2	Получен ответ.	2
Сумма		4

Задача 5. Коробка передач



Так как резинка не проскальзывает по поверхности карандаша, относительное движение карандашей и резинок в данном случае аналогично качению колеса без проскальзывания по поверхности.
Рассмотрим для примера качение треугольного колеса без проскальзывания. Если оно совершит один полный оборот, то пройдёт расстояние, равное своему периметру. Это верно и для любой другой фигуры. И наоборот, если колесо прошло некоторое расстояние, то оно совершило число оборотов, обратно пропорциональное своему периметру. Тогда чем меньше периметр, тем больше оборотов.
В случае с карандашами можно заметить, что так как расстояние между карандашами не меняется, соседние карандаши проходят одинаковые расстояния вдоль резинок. Значит числа оборотов, которые они при этом совершают, обратно пропорциональны периметрам карандашей, которые равны $3a$, $4a$ и $2a$ для треугольного, квадратного и шестиугольного карандашей соответственно.
Так как мы не знаем заранее, где какой карандаш, обозначим их периметры P_1, P_2 и P_3, а N_1, N_2 и N_3 — количества оборотов вокруг осей. Если первый карандаш совершил N_1 оборотов, то второй

$$N_2 = N_1 \frac{P_1}{P_2}. \tag{17}$$

Аналогично, если второй карандаш совершил N_2 оборотов, третий совершил

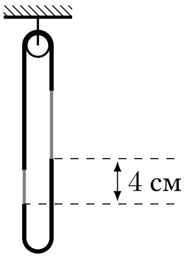
$$N_3 = N_2 \frac{P_2}{P_3} = N_1 \frac{P_1}{P_2} \frac{P_2}{P_3} = N_1 \frac{P_1}{P_3}. \tag{18}$$

Чтобы число оборотов N_3 было наибольшим, нужно выбрать $P_1 = 4a$, а $P_3 = 2a$. Тогда самый правый карандаш совершит 2000 оборотов.

Ответ: Правый карандаш совершит 2000 оборотов.

№	Критерий	Баллы
1	Правильное расположение карандашей без обоснования (квадрат, треугольник, шестиугольник).	0
2	Правильное расположение карандашей с обоснованием (квадрат, треугольник, шестиугольник).	2
3	Обоснование того, что число оборотов обратно пропорционально периметру (для одного карандаша).	3
4	Составление пропорции вида (18) для любой пары карандашей.	2
5	Получен верный ответ. 2000 оборотов.	1
Сумма		8

Задача 6. Две верёвки, две резинки



Пусть ρ_1 и ρ_2 — плотности верхней и нижней верёвки, а s их площадь поперечного сечения. Обозначим за x_1, y_1 и ℓ_1 длины соответственно верхней верёвки, нижней верёвки и резинки на левой стороне, а за x_2, y_2 и ℓ_2 — на правой стороне. Длины закруглений пренебрежимо малы. Из равенства

$$x_1 + y_1 + \ell_1 = x_2 + y_2 + \ell_2 \tag{19}$$

можно получить соотношение

$$\Delta x + \Delta y + \Delta \ell = 0. \tag{20}$$

Рассмотрим равновесие блока. Чтобы он не начал вращаться, участки верёвок с обеих сторон должны иметь одинаковый вес, а значит их суммарные массы должны быть равны. Силы упругости в резинках в данном случае оказываются внутренними и их можно не учитывать. Запишем условие равенства масс

$$\rho_1 x_1 s + \rho_2 y_1 s = \rho_1 x_2 s + \rho_2 y_2 s, \tag{21}$$

откуда

$$\rho_1 \Delta x + \rho_2 \Delta y = 0. \tag{22}$$

Найдя из (20) $\Delta x = -7$ см, и, подставив его в (22), найдем

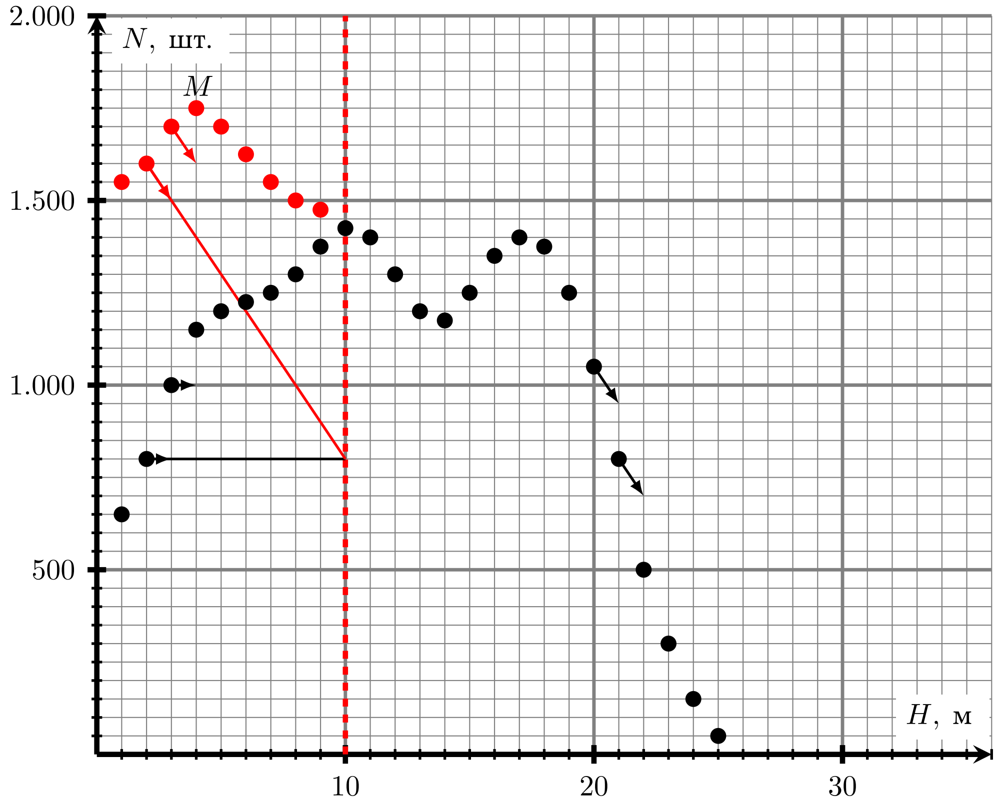
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{7}. \tag{23}$$

Ответ: Плотности относятся, как 4 к 7.

№	Критерий	Баллы
1	Использовано равенство длин с обоих сторон (19).	1
2	Переход к использованию разностей (20).	2
3	Приведено условие равновесия блока (21).	1
4	Переход к использованию разностей (22).	2
5	Получен верный ответ. $4/7$	2
Сумма		8

Задача 7. Ликвидация

Проанализируем, как будет меняться график распределения растений по высоте со временем. Сначала предположим, что растения не срезаются. Тогда график будет сдвигаться каждый день на одну клетку вправо, так как все растения бы вырастают ровно на 1 метр.
Теперь предположим, что растения не растут, а только срезаются. Тогда график двигается вниз на две клетки в день, что соответствует уменьшению количества растений на 100.
Когда присутствует и рост и срезание, график испытывает оба движения одновременно, за исключением его части, расположенной левее отметки 10 м, которая движется горизонтально.



Удобно совершить вспомогательное перестроение графика, подняв все точки из левой части так, чтобы в процессе движения всего графика вправо и вниз, каждая точка пересекла отметку 10 м на правильной высоте. После этого все точки графика можно рассматривать однообразно.
Тогда остается заметить, что последними будут срезаны растения, которых больше всего, то есть соответствующие самой высокой точке на графике (точка M). Эти растения будут срезаться 18 дней. В последний день будет срезано всего 50 растений. За это время их высота изменится с 4 до 22 метров.

Ответ: Последними будут срезаны растения высотой 22 метра.

№	Критерий	Баллы
1	Утверждение о том, что чем выше точка из правой части, тем позже она будет срезана.	2
2	Указано, как движутся точки графика.	2
3	Идея «поднятия» точек левой части графика.	2
4	Получен верный ответ. 22 метра.	2
Сумма		8

Примечание: Решение, основанное на переборе оценивается 8 баллами, только если рассмотрены все точки. В противном случае ставятся только баллы за ответ.