Городской тур 2020/21. 11 класс

Задача 1.

Пусть ν – изначальное количество вещества газа в каждом шаре, V – объём каждого шара.

После соединения шаров трубочками газ начнёт перетекать между шарами до тех пор, пока давления во всех шарах не окажутся одинаковыми и равными давлению P_0 – показаниям манометра. Обозначим ν_i – количество вещества газа в каждом шаре, когда установится равновесие в первом случае. Тогда в каждом шаре справедливо уравнение Клайперона-Менделеева:

$$P_0 = \frac{\nu_i R T_i}{V}. \tag{1}$$

С другой стороны, суммарное количество вещества газа в системе равно $N\nu$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i = N\nu. \tag{2}$$

Выражая из первого уравнения $\nu_i = P_0 V/(RT_i)$ и подставляя во второе, получим

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{P_0 V}{RT_i} = N\nu.$$

В этом равенстве можно вынести за скобку общий множитель:

$$\frac{P_0 V}{R} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i} = N\nu. \tag{3}$$

Когда в систему подключили ещё один шар, рассуждая аналогично, получаем соотношение

$$\frac{PV}{R} \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{T_i} = (N+1)\nu \qquad \text{или} \qquad \frac{P}{R}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_{N+1}}\right) = (N+1)\frac{\nu}{V}. \tag{4}$$

Выразим ν/V из (3) и подставим в (4):

$$\frac{\nu}{V} = \frac{P_0}{NR} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{R}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_{N+1}}\right) = (N+1)\frac{\nu}{V} = (N+1)\frac{P_0}{NR} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i}. \tag{5}$$

Отсюда легко выразить ответ:

$$\frac{P}{R} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i} + \frac{P}{R}\frac{1}{T_{N+1}} = (N+1)\frac{P_0}{NR} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{R}\frac{1}{T_{N+1}} = \left(\frac{(N+1)P_0}{NR} - \frac{P}{R}\right) \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i} \qquad \Rightarrow$$

$$T_{N+1} = \frac{NP}{(N+1)P_0 - NP} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_i}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Важно: знаменатель выражения не может обратиться в ноль или стать отрицательным. Поэтому если $(N+1)P_0 \leq NP$ решения не существует.

Ответ: Если $(N+1)P_0 \geq NP$, ответ задаётся формулой (6), в противном случае нет решений.

Примечание. Задачу можно решить с помощью аналогии с параллельным соединением N проводников с разными сопротивлениями: роль силы тока через каждый проводник выполняют величины ν_i, роль сопротивлений – величины T_i, роль напряжения – величина PV/R. Формула (2) аналогична суммированию токов при параллельном соединении, формула (1) – закону равенства напряжений на параллельно соединённых проводниках. Не удивительно, что и в ответе мы получили закон, аналогичный вычислению суммарного сопротивления при параллельном соединении.

Задача 2. Введём ось x, параллальную a и ось y, параллельную b. Первоначально центр масс космонавтов приближался к цели вдоль оси x со скоростью V. Когда ранец сработал, космонавт А приобрёл скорость $V_\perp$, перпендикулярную тросу, и V вдоль троса, причём $V_\perp/V = b/a$.

При этом центр масс космонавтов стал двигаться теперь уже приближаясь к цели и вдоль оси y – со скоростью $V_\perp/2$. В системе отсчёта центра масс оба космонавта движутся по окружности радиуса $L/2$ со скоростью $V_\perp/2$, то есть с угловой скоростью $\omega = V_\perp/L$.

Заметьте, траектория каждого космонавта – довольно сложная кривая (циклоида), однако описать её легко именно рассмотрев их движение как суперпозицию равномерного движения центра масс и равномерного вращения вокруг этого центра.

Условие встречи космонавта с целью в проекции на ось y (T – искомое время):

$$\frac{V_\perp T}{2} = b \pm \frac{L}{2}\sin(\omega T),$$

здесь в левой части – путь, пройденный центром масс, ωT – угол, на который повернулся трос. Знак $\pm$ зависит от того, какой из двух космонавтов встретится с целью. В это равенство можно подставить найденное $V_\perp$:

$$\frac{VTb}{2a} = b \pm \frac{L}{2}\sin(\omega T),$$

Аналогично запишем условие встречи космонавта с целью в проекции на ось x (здесь до цели лететь путь $a + L/2$):

$$VT = a + \frac{L}{2} \pm \frac{L}{2}\cos(\omega T).$$

Из полученных двух уравнений можно выразить $\sin(\omega T)$ и $\cos(\omega T)$, и записать условие $\sin^2(\omega T)+\cos^2(\omega T) = 1$:

$$\left(\frac{VTb - 2ab}{aL}\right)^2 + \left(\frac{2VT - 2a - L}{L}\right)^2 = 1,$$

которое представляет собой квадратное уравнение относительно T и из которого выражается ответ задачи.

Ответ: Существует два решения:

$$T = \frac{2a(K \pm \sqrt{K^2 - (b^2 + a^2 + aL)(b^2 + 4a^2)})}{V(b^2 + 4a^2)}, \qquad \text{где} \qquad K = b^2 + 2a^2 + aL$$

Задача 3. Если предположить, что на призму попадает не параллельный пучок лучей, призма повернёт каждый из лучей на свой угол, который будет разным для всех упавших на неё лучей. Причём легко догадаться, что для преломлённых призмой лучей не будет существовать единой точки, в которую можно было бы продлить эти лучи. Иными словами, пройдя призму, лучи пойдут так, что нельзя будет представить, что они вышли из одной точки. А значит, такой пучок лучей не будет собран линзой в одну точку.

Единственный вариант – если лучи, пройдя первую линзу, движутся параллельно друг другу. Тогда призма поворачивает их все на один и тот же угол, а затем параллельный пучок лучей собирается второй линзой в её фокусе.

Это позволяет определить, что фокусное расстояние первой линзы составляет 4 клетки, а второй – две диагонали клетки.

На рисунке 1 мы для наглядности нарисовали параллельные пучки красным и зелёным цветом.

Значит, по условию задачи, точка А лежит в фокальной плоскости линзы $Л_1$, точка $А'$ – в фокусе линзы $Л_2$. После прохождения светом первой линзы образуется параллельный пучок лучей, идущий параллельно АО. На передней поверхности призмы этот пучок не преломляется, а за второй идёт параллельно ГОО второй линзы (ведь из условия видно, что изображение $А'$ попало в фокус $Л_2$, а не просто в фокальную плоскость, значит, образовавшие его лучи шли параллельно ГОО).

Найдя по клеточкам $\sin\alpha = 3/5$ и $\sin\beta = \sqrt{2}/2$, и применив закон Снелла получим

$$n = \sin\beta/\sin\alpha = 5\sqrt{2}/6.$$

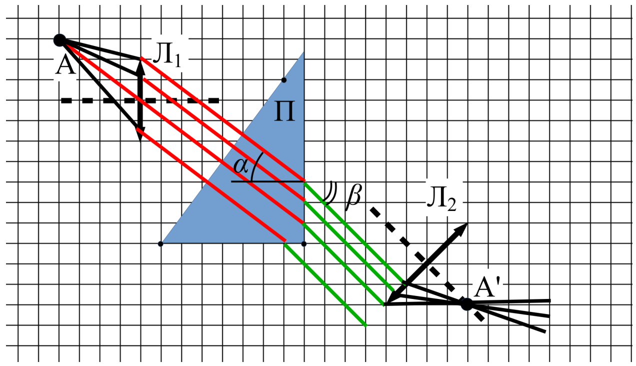

Рис. 1:

При решении задачи важно не просто угадать решение, а провести рассуждение, показывающее, что другие предположения приводят к противоречиям. Возможно рассмотрение в качестве решения дополнительного случая, когда призма изготовлена из материала с единичным коэффициентом преломления, однако этот случай жюри посчитало неинтересным и за отсутствие его рассмотрения баллы не снижались.

Ответ: $F_1 = 2$ см, $F_2 = \sqrt{2}$ см, $n = 5\sqrt{2}/6 \simeq 1.18$.

Задача 4.

Пусть на поверхности шарика расположен заряд q. Обозначим потенциал бесконечно удалённой точки (и металлической стены, содержащей эту точку) за ноль. Потенциал шарика будет создаваться зарядами, находящимися на его поверхности (эта величина равна kq/r) и зарядами, индуцированными на металлической стенке.

Следует остановиться на вопросе, почему на стенке возникает заряд, и как его учесть. Заряды шарика создают на стенке электрическую напряжённость, так что заряды внутри металла перераспределяются до тех пор, пока напряжённость в металле не пропадёт, а сам металл не окажется эквипотенциальным. При этом по т.н. "методу зеркальных изображений" можно доказать, что поле, создаваемое индуцированными зарядами в точности такое же, как если бы стенка отсутствовала, а вместо этого за стенкой зеркально симметрично шарику находилось "изображение" – шарик с зарядом $-q$.

Расстояние между шариком и стенкой обозначим R. Тогда $2R$ – расстояние между шариком и его электростатическим изображением. Интересно, что энергия взаимодействия шарика и изображения равна не $-kq^2/(2R)$ (как это было бы, если бы мы интересовались потенциальной кулоновской энергией двух шариков), а в 2 раза меньше. Действительно, если два шарика падают друг на друга, потенциальная кулоновская энергия переходит в механическую – кинетическую энергию каждого шарика. Однако, если одно из тел – изображение, оно перемещается с той же скоростью, что и исходный шарик, однако кинетической энергии не имеет. Иными словами, энергия взаимодействия шарика с изображением равна $-kq^2/(4R)$.

В результате, полный потенциал на шарике равен

$$\frac{kq}{r} - \frac{kq}{2R}.$$

Отметим, что для маленького шарика второй вклад гораздо меньше первого. Разность потенциалов между шариком и стенкой при этом равна приложенному между ними напряжению

$$U = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{2R} - 0 = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{kq(2R-r)}{2Rr}.$$

Напряжённость рядом с шариком создаётся и зарядом самого шарика, и электростатическим "изображением". Суперпозиция напряжённости зарядов самого шарика kq/r^2 и напряжённости, создаваемой отрицательно заряженным "изображением" $kq/(2R)^2$, даёт (напряжённости складываются с той стороны шарика, где он ближе к стенке)

$$E = \frac{kq}{r^2} + \frac{kq}{4R^2} = kq\frac{4R^2+r^2}{4r^2R^2} \qquad \Rightarrow \qquad kq = E\frac{4r^2R^2}{4R^2+r^2}.$$

В момент пробоя $R = D - L\cos\varphi$, напряжённость максимальная рядом с шариком со стороны стенки и равна $E_{\text{кр}}$, откуда

$$kq = E_{\text{кр}}\frac{4r^2(D-L\cos\varphi)^2}{4(D-L\cos\varphi)^2+r^2}.$$

Подставляя это в выражение для U, получим ответ на один из вопросов задачи:

$$U = \frac{kq(2R-r)}{2Rr} = E_{\text{кр}}\frac{2r(D-L\cos\varphi)(2(D-L\cos\varphi)-r)}{4(D-L\cos\varphi)^2+r^2}. \qquad (7)$$

Из условия механического равновесия в момент пробоя несложно найти массу шарика. В момент пробоя результирующая вертикальной силы тяжести mg и горизонтальной силы притяжения шарика к стене (или, что то же самое, к изображению) $kq^2/(4R^2)$ направлена под углом φ к вертикали, то есть

$$\frac{kq^2}{4R^2}\frac{1}{mg} = \operatorname{tg}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{kq^2\operatorname{ctg}\varphi}{4gR^2} = \frac{E_{\text{кр}}^2 4r^4(D-L\cos\varphi)^2}{k[4(D-L\cos\varphi)^2+r^2]^2}\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{g}. \qquad (8)$$

<u>Ответ</u>: Напряжение в момент пробоя задаётся соотношением (7), а масса шарика – соотношением (8).

Задача 5. Из-за переменного магнитного поля в катушке возникает ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - \frac{d(B_0NS\sin\omega t)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - \omega B_0NS\cos\omega t,$$

и эта величина совпадает с напряжением на диоде.

Вначале ток и скорость изменения тока равны нулю, поэтому $\mathcal{E} < 0$ и диод закрыт. В момент t_0, когда $\omega t_0 = \pi/2$ диод открывается (последнее слагаемое в выражении для $\mathcal{E}$ оказывается больше нуля), напряжение на диоде оказывается равным нулю, т.е.

$$L\frac{dI}{dt} = -\omega B_0NS\cos\omega t.$$

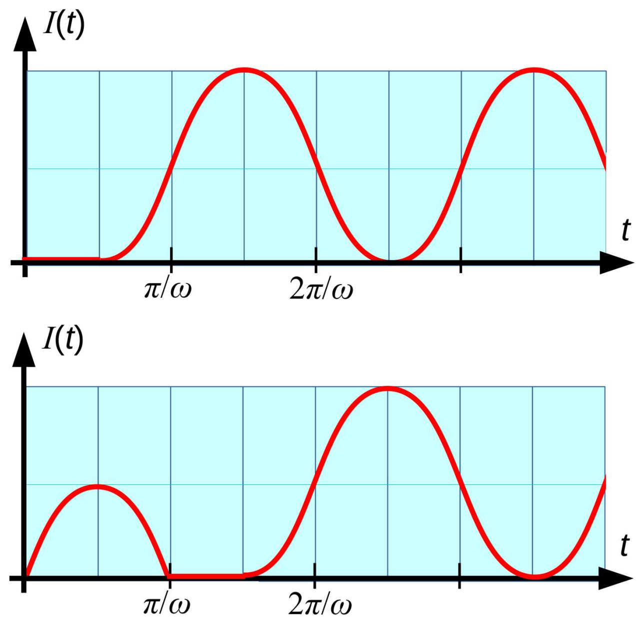

Рис. 2:

Отсюда несложно найти зависимость тока от времени

$$I(t) = \frac{B_0NS}{L}(1-\sin(\omega(t-t_0))) \qquad \text{при} \qquad t \geq t_0 = \frac{\pi}{2\omega}. \qquad (9)$$

Если изменить направление B_0, изменится исходное уравнение для $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} + \omega B_0 NS \cos\omega t,$$

при этом диод открывается сразу, и зависимость тока от времени получится в виде

$$I(t) = \frac{B_0 NS \sin\omega t}{L},$$

однако в момент времени $2t_0 = \pi/\omega$ диод закроется на полпериода, пока $\cos\omega t < 0$ в выражении для $\mathcal{E}$.

Полученные зависимости несложно представить на графике.

Ответ: При изначальном направлении B_0 до момента $t_0 = \pi/(2\omega)$ ток отсутствовал, а затем, при $t \geq t_0$

$$I(t) = \frac{B_0 NS(1 - \sin\omega t)}{L}.$$

При изменённом направлении B_0 сначала, при $t \leq 2t_0$ ток равен $I(t) = \frac{B_0 NS \sin\omega t}{L}$, затем он равен нулю до момента $t = 3t_0$, после чего как и в предыдущем случае подчиняется зависимости

$$I(t) = \frac{B_0 NS(1 - \sin(\omega(t - 3t_0))}{L}$$