11 класс

11 класс. Задача 1: “Колебания массивной пружины”

Теоретическое выражение для периода колебаний массивной пружины, висящей под собственным весом, пренебрегая ее оставшейся сжатой частью, имеет вид $T = 2\pi\sqrt{m/3k}$.

1. Выведите теоретическое выражение для периода колебаний массивной пружины, висящей под собственным весом.

2. Выведите теоретическую зависимость периода колебаний подвешенной растянутой под собственным весом массивной пружины от ее длины в нерастянутом состоянии.

3. Исследуйте экспериментально зависимость периода колебаний массивной пружины, подвешенной за один конец, от ее длины.

4. Определите коэффициент жесткости выданной вам пружины по измеренным периодам колебаний.

Оборудование: пружина, линейка, секундомер, пластина (линейка), скотч по требованию, весы по требованию.

Решение

1. Разобьем пружину на N равных частей, жесткость каждой части $k_1 = kN$. Пронумеруем части снизу, тогда на $i+1$ часть действует вес всех частей ниже нее.

$$F_{i+1} = \frac{mg\,i}{N}, \qquad \Delta l_{i+1} = \frac{F}{k_1} = \frac{mg\,i}{kN^2}$$

Удлинение пружины будет равно сумме удлинений

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{mg\,i}{kN^2} = \frac{mg}{kN^2}\frac{N(N-1)}{2}$$

$$N \to +\infty \qquad \Delta l = \frac{mg}{2k}. \tag{1}$$

Потенциальная энергия может быть найдена как

$$W_p = \sum \frac{k_1 \Delta l_i^2}{2} = \sum \frac{k_1}{2}\left(\frac{mg\,i}{kN^2}\right)^2 = \sum \frac{kN}{2}\left(\frac{mg\,i}{kN^2}\right)^2 = \frac{kNm^2g^2}{2k^2N^4}\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{m^2g^2}{2kN^3}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \qquad W_p \to \frac{m^2g^2}{6k}$$

$$W_p = \frac{4k^2\Delta l^2}{6k} = \frac{2k\Delta l^2}{3}. \tag{2}$$

Найдем центр масс растянутой под собственным весом массивной пружины. Находя расстояние от ее нижней части, имеем

$$x_{сн} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N}\Delta m x_i = \frac{1}{m}\frac{m}{N}\sum_{j=1}^{N}x_i = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{l}{N}j + \sum_{i=1}^{j}\frac{mg\,i}{kN^2}\right)$$

$$x_{сн} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{l}{N}j + \frac{mg}{kN^2}\frac{j(j+1)}{2}\right)$$

$$x_{сн} = \frac{1}{N}\left(\frac{lN(N+1)}{2N} + \frac{mg}{2kN^2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N(N+1)}{2}\right)\right)$$

Переходя к пределу при $N \to +\infty$, получим

$$x_{сн} = \frac{l}{2} + \frac{mg}{6k}$$

$$x_{сн} = \frac{l}{2} + \frac{2k\Delta l}{6k} = \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{3}.$$

Расстояние до центра масс от закрепленного верхнего края пружины

$$x_{св} = \Delta l + l - \frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{3} = \frac{2\Delta l}{3} + \frac{l}{2}. \tag{3}$$

Период собственных колебаний массивной пружины.

Из закона сохранения энергии $W_p + W_k = \text{const}$ получим

$$\frac{2k\Delta l^2}{3} + \frac{mv_c^2}{2} = \text{const},$$

$$v_c = \frac{dx_{c1}}{dt} = \frac{2\Delta l'}{3}.$$

$$\frac{2k\Delta l^2}{3} + \frac{m}{2}\left(\frac{2\Delta l'}{3}\right)^2 = \text{const}$$

$$\frac{3k}{m}\Delta l^2 + \Delta l'^2 = \text{const}$$

Выведенное соотношение является приближенным из-за замены при нахождении кинетической энергии распределенной массы на движение центра масс. Полученное уравнение является каноническим дифференциальным уравнением колебаний вида

$$\omega_0^2\Delta l^2 + \Delta l'^2 = \text{const},$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}. \tag{4}$$

Учитывая, что

$$k(l) = k_0\frac{L}{l},\ m(l) = m_0\frac{l}{L},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 l^2}{3k_0 L^2}} = 2\pi\frac{l}{L}\sqrt{\frac{m_0}{3k_0}}. \tag{5}$$

2. При малых l возрастает как погрешность измерения периода, так и влияние массы оставшейся сжатой из-за предварительного натяга части пружины.

3. Зная угловой коэффициент зависимости $T = al + b$, найдем

$$a = \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{m_0}{3k_0}} \quad \Rightarrow \quad k_0 = \frac{4\pi^2}{L^2}\frac{m_0}{3a^2}. \qquad (6)$$

Комментарий. Строгое выражение для периода колебаний, учитывающее распределение массы и скорости при нахождении кинетической энергии, а также оставшуюся сжатой за счет силы предварительного натяжения ее часть, имеет вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0(l-L)(8l+7L)}{20k_0L_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l(8l+7L)}{10(l-L)g}},$$

где масса всей пружины m_0, длина всей пружины в нерастянутом состоянии L_0, длина подвешенной части пружины в нерастянутом состоянии l, длина нерастянутой части L, удлинение пружины Δl. Оно совпадает с экспериментом при k_0, определенном из статического удлинения пружины (см. первую задачу 9 класса) с относительной погрешностью не более 1 %. Приближенное соотношение (5) расходится с экспериментом не более, чем на 15 %.

Критерии оценивания

1.	Получена формула (1)	1 балл
2.	Получена формула (2).	2 балла
3.	Получена формула (3)	1 балл
4.	Получена формула (4)	1 балл
5.	Получена формула (5)	1 балл
6.	Проведены измерения, сведены в таблицу	1 балл
7.	Для каждой точки проведено несколько серий измерений	+1 балл
8.	Построен график	2 балла
9.	Получена формула (6)	2 балла
10.	Определено значение $k_0 = 1.1 \pm 0.3$ Н/м	2 балла
11.	Оценена погрешность	1 балл

11 класс. Задача 2: “Измерение ЭДС”

См. 10 класс задача 2.