Районный тур 2021. 11 класс. Решения.

Задача 1. I вариант. Пронумеруем конденсаторы слева направо. Соответственно, обозначим их заряды q_1, q_2, q_3, а напряжения на них U_1, U_2, U_3. Очевидно, заряды и напряжения каждого конденсатора связаны соотношением

$$q_1 = CU_1, \quad q_2 = CU_2, \quad q_3 = CU_3. \tag{1}$$

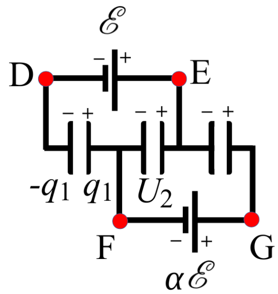

Рис. 1:

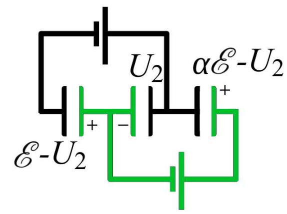

Рис. 2:

Знаки зарядов пластин каждого конденсатора выберем, как показано на рисунке 1: левые пластины заряжены отрицательно, правые – положительно, также как у источников $\mathscr{E}$ и $\alpha\mathscr{E}$. Если мы не угадали со знаком заряда пластин какого-либо конденсатора, в ответе мы просто получим отрицательное значение для этого заряда.

Используем знание ЭДС источников, чтобы связать потенциалы разных точек нашей схемы. Пусть потенциал точки D ϕ_D равен ϕ_0. Так как между D и E находится источник $\mathscr{E}$, очевидно, потенциал точки E больше, чем ϕ_0 на величину этой ЭДС:

$$\phi_D = \phi_0, \qquad \phi_E = \phi_0 + \mathscr{E}.$$

С другой стороны, точки E и F подсоединены с разных сторон к пластинам второго конденсатора, значит разность потенциалов на них в точности равна U_2, поэтому

$$\phi_F = \phi_E - U_2 = \phi_0 + \mathscr{E} - U_2.$$

Здесь мы учли, что, по нашему предположению, левая пластина 2го конденсатора заряжена отрицательно, а правая – положительно, то есть потенциал левой пластины *меньше*, чем правой.

Наконец, потенциал точки G больше, чем ϕ_F, так как между этими точками включена ЭДС величиной $\alpha\mathscr{E}$:

$$\phi_G = \phi_F + \alpha\mathscr{E} = \phi_0 + \mathscr{E} - U_2 + \alpha\mathscr{E}.$$

Зная потенциалы точек D, E, F, G можем выразить через них напряжение на каждом конденсаторе. Например, D и F подключены к разным пластинам первого конденсатора, то есть (здесь мы снова учитываем, что напряжение – потенциал положительно заряженной правой пластины минус потенциал отрицательно заряженной левой):

$$U_1 = \phi_F - \phi_D = (\phi_0 + \mathscr{E} - U_2) - \phi_0 = \mathscr{E} - U_2.$$

Аналогично, напряжение третьего конденсатора – разность потенциалов точек G и E:

$$U_3 = \phi_G - \phi_E = (\phi_0 + \mathscr{E} - U_2 + \alpha\mathscr{E}) - (\phi_0 + \mathscr{E}) = \alpha\mathscr{E} - U_2.$$

Итак, напряжения всех конденсаторов можно выразить через единственную неизвестную величину – в нашем случае U_2, значения этих напряжений мы подписали на рис. 2.

Теперь заметим, что участок схемы, выделенный на рис. 2 зелёным, должен иметь нулевой суммарный заряд, ведь, во-первых, изначально система была не заряжена, а во-вторых, эта часть схемы оставалась изолированой от остальных элементов. Источник с ЭДС $\alpha\mathscr{E}$ мог только «переносить» заряды через себя, но не порождать их. Значит, с учетом того, что заряд на правой пластине первого конденсатора обозначен у нас $+q_1$, заряд на левой пластине второго конденсатора обозначен $-q_2$, а заряд на правой пластине третьего конденсатора $+q_3$, имеем:

$$q_1 - q_2 + q_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad CU_1 - CU_2 + CU_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad U_1 - U_2 + U_3 = 0.$$

Здесь мы использовали соотношения (1). Подставляя сюда $U_1 = \mathscr{E} - U_2$ и $U_3 = \alpha\mathscr{E} - U_2$, выразим $U_2 = (1+\alpha)\mathscr{E}/3$. Теперь мы можем выразить напряжения всех конденсаторов, а значит, и их заряд:

$$Q_1 = CU_1 = \frac{2-\alpha}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_2 = CU_2 = \frac{1+\alpha}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_3 = CU_3 = \frac{2\alpha-1}{3}C\mathscr{E}.$$

Заметим, что записывая связь между потенциалами разных точек схемы, можно было стартовать с любой точки (не обязательно D) и выражать все потенциалы не через U_2, а через U_1 или U_3, пользуясь аналогичными рассуждениями. Вместо изолированности участка схемы, выделенного зелёным, можно было наоборот, использовать условие изолированности части схемы, оставленной чёрной на рисунке 2.

Ответ: Если нумеровать конденсаторы слева направо, считая заряд положительным, когда левая пластина заряжена отрицательно, а правая положительно, то

$$Q_1 = \frac{2-\alpha}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_2 = \frac{1+\alpha}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_3 = \frac{2\alpha-1}{3}C\mathscr{E}.$$

Задача 2. I вариант.

Пусть банка катится направо со скоростью v. Так как трение тела о банку велико, будем считать, что в рассматриваемый момент тело имеет ту же скорость, что и поверхность банки: движется поступательно вправо вместе с осью катящейся банки (со скоростью $\vec{v}$) и вращается вокруг оси банки по часовой стрелке с той же скоростью $\vec{v}_{\text{вращ}}$ (см. рис. 3, угол α на рисунке характеризует расположение тела относительно банки в данный момент).

Таким образом, тело имеет скорость $V = \vec{v} + \vec{v}_{\text{вращ}}$, при этом $|\vec{v}_{\text{вращ}}| = |\vec{v}|$, так как по условию задачи банка катится без проскальзывания – нижняя точка банки в каждый момент покоится относительно земли.

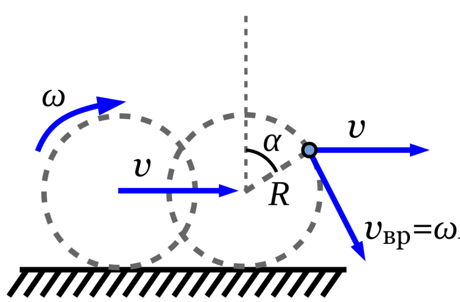

Рис. 3:

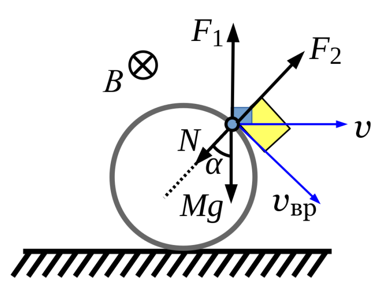

Рис. 4:

На рисунке 4 изображены силы, действующие на тело. Сила Лоренца qBV представлена в виде двух вкладов: $F_1 = QBv$ и $F_2 = QBv_{\text{вращ}} = QBv$, каждая из них направлена в соответствии с «правилом левой руки», перпендикулярно соответствующей компоненте скорости. Чтобы тело не отрывалось от поверхности банки, сила N не должна обращаться в ноль.

Запишем второй закон Ньютона для кругового движения тела. В проекции на направление г центру вращения сумма всех сил должны быть равна центростремительной силе Mv^2/R:

$$N + Mg\cos\alpha - F_2 - F_1\cos\alpha = \frac{Mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N + Mg\cos\alpha - QBv - QBv\cos\alpha = \frac{Mv^2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$N = \frac{Mv^2}{R} + QBv - (Mg - QBv)\cos\alpha. \qquad (2)$$

Случай 1. Если $Mg - QBv \geq 0$ (то есть при $v \leq Mg/(QB)$), посмотрев на выражение (2), легко понять, что N минимальна, если $\cos\alpha = 1$, то есть когда тело находится в верхней точке траектории:

$$N_{min} = \frac{Mv^2}{R} + QBv - (Mg - QBv) \geq 0.$$

Неравенство в правой части мы написали, так как хотим использовать условие, что тело не отрывается от банки даже в момент, когда оно проходит верхнюю точку траектории. Решая неравенство относительно v, находим (напомним, мы интересуемся случаем $v < Mg/(QB)$ только положительными значениями скорости v):

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} - 1\right] \leq v \leq \frac{Mg}{QB}.$$

Совместны ли два этих условия? Проверим, когда нужный диапазон скоростей существует, то есть верно ли

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} - 1\right] \leq \frac{Mg}{QB}.$$

Упростим неравенство:

$$\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} \leq \frac{M^2 g}{Q^2B^2R} + 1, \quad \text{пусть } z = \frac{M^2 g}{Q^2B^2R} + 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} \leq z \quad \Rightarrow z^2 - z = z(z-1) \geq 0.$$

Последнее неравенство верно, если $z \geq 1$, но если вспомнить, как введено z, очевидно, что последнее верно всегда.

Случай 2. Если же в выражении N скобка $Mg - QBv$ неположительна (то есть при $v \geq Mg/(QB)$), посмотрев на выражение (2), легко понять, что N минимальна, если $\cos\alpha = -1$, то есть когда тело находится в нижней точке траектории:

$$N_{min} = \frac{Mv^2}{R} + QBv + (Mg - QBv) \geq 0.$$

Упрощая это неравенство $N_{min} = Mv^2/R + Mg \geq 0$, видим, что оно выполняется всегда. Поэтому в рассматриваемом случае достаточно, чтобы $v \geq Mg/(QB)$.

Объединяя случаи 1 и 2 видим, что когда колесо катится вправо, достаточно потребовать

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} - 1\right] \leq v.$$

Пусть теперь банка катится налево. При этом направления сил F_1 и F_2 изменятся на противоположные. Вместо ф-лы (2) будет иметь место выражение

$$N = \frac{Mv^2}{R} - QBv - (Mg + QBv)\cos\alpha. \qquad (3)$$

Здесь достаточно рассмотреть единственный случай, так как по условию $Q > 0$, то есть $Mg+QBv > 0$: минимум N достигается при $\cos\alpha = 1$, неотрицательность N приобретает вид

$$N = \frac{Mv^2}{R} - 2QBv - Mg \geq 0.$$

Решая неравенство относительно v, находим (учитывая, что нас интересуют лишь положительные значения скорости v)

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1+\frac{M^2 g}{Q^2B^2R}}+1\right] \leq v.$$

Ответ: Если колесо катится направо, должно быть

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1+\frac{M^2 g}{Q^2B^2R}}-1\right] \leq v.$$

Если колесо катится налево, требуется

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1+\frac{M^2 g}{Q^2B^2R}}+1\right] \leq v.$$

Задача 3. I вариант. Обозначим P_a – атмосферное дваление.

Плотность атмосферного воздуха зависит от его температуры T_0, несложно найти эту зависимость по уравнению Клапейрона-Менделеева, записав последнее для массы воздуха M в некотором объёме V:

$$P_aV = \frac{M}{\mu_\text{в}}RT_0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P_a\mu_\text{в}}{RT_0} = \frac{M}{V} \equiv \rho_0. \tag{4}$$

Очевидно, если температура воздуха увеличивается до T (при неизменном атмосферном давлении), его плотность становится равна

$$\frac{P_a\mu_\text{в}}{RT} \equiv \rho. \tag{5}$$

Пусть m – масса гелия внутри аппарата, V_0 – суммарный объём обоих отсеков аппарата, V – объём верхнего отсека (с гелием) в начале. Давление воздуха в нижнем отсеке, а также давление гелия равны по условию P_a. Для объёма V можно написать выражение, связывающее его с состоянием гелия по уравнению Клапейрона-Менделеева:

$$P_aV = \frac{m}{\mu_\text{не}}RT_0 \Rightarrow \qquad V = \frac{mRT_0}{P_a\mu_\text{не}}. \tag{6}$$

Вначале, когда температура системы была равна T_0, подъёмная сила, действующая на груз, была разностью силы Архимеда, действующей на аппарат со стороны атмосферы $\rho_0 gV$ и суммарныйо веса: вес аппарата F_0, вес гелия mg и вес воздуха в нижнем отсеке $\rho_0 g(V-V_0)$:

$$F_1 = \rho_0 gV_0 - [F_0 + mg + \rho_0 g(V_0 - V)] = \rho_0 gV - mg - F_0. \tag{7}$$

Это и есть максимальный вес груза, который поднимает в этом случае аппарат. Подставляя сюда ρ_0 и V из (4, 6), получим

$$F_1 = \frac{P_a\mu_\text{в}}{RT_0} g \frac{mRT_0}{P_a\mu_\text{не}} - mg - F_0 = mg\left(\frac{\mu_\text{в}}{\mu_\text{не}} - 1\right) - F_0.$$

Это возволяет найти вес гелия,

$$mg = \frac{F_0 + F_1}{\mu_{\text{в}}/\mu_{\text{не}} - 1} \tag{8}$$

Когда воздух в нижнем отсеке нагрелся, гелий вначале не изменил свою температуру T_0 (и давление у него по-прежнему атмосферное), а значит объём V верхнего отсека ещё не изменился. Зато плотность (и вес) воздуха в нижнем отсеке изменилась. Поэтому и подъёмная сила вместо ф-лы (7) будет иметь вид

$$F_2 = \rho_0 g V_0 - [F_0 + mg + \rho g(V_0 - V)] = (\rho_0 - \rho) g V_0 - F_0 - mg + \rho g V. \tag{9}$$

Наконец, когда гелий также нагрелся, объём верхнего отсека стал равен V', который вычисляется аналогично ф-ле (6)

$$P_a V' = \frac{m}{\mu_{\text{не}}} RT \qquad \Rightarrow \qquad V' = \frac{mRT}{P_a \mu_{\text{не}}}. \tag{10}$$

При этом подъёмная сила аппарата также изменится по сравнению с (9) и станет равна

$$F_3 = \rho_0 g V_0 - [F_0 + mg + \rho g(V_0 - V')] = (\rho_0 - \rho) g V_0 - F_0 - mg + \rho g V'. \tag{11}$$

Сравнивая (9) и (11), видим, что всё, кроме последнего слагаемого у них одинаковое. Значит, чтобы получить F_3 из F_2, нужно написать

$$F_3 = F_2 - \rho g V + \rho g V'$$

Подставляя сюда ρ из (5), V и V' из (6,10), получим

$$F_3 = F_2 - \frac{P_a \mu_{\text{в}}}{RT} g \frac{mRT_0}{P_a \mu_{\text{не}}} + \frac{P_a \mu_{\text{в}}}{RT} g \frac{mRT}{P_a \mu_{\text{не}}} = F_2 - mg \frac{T_0 \mu_{\text{в}}}{T \mu_{\text{не}}} + mg \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{не}}} = F_2 + mg \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{не}}} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right).$$

Подставляя сюда mg из (8), получим ответ.

Ответ:

$$F_3 = F_2 + \frac{(F_0 + F_1) k}{k - 1} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right), \qquad \text{где} \quad k = \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{не}}}.$$

Задача 4. I вариант. Рассмотрим сначала горизонтальное движение упругого **шарика**. Горизонтальная скорость его движения $V \cos\alpha$ всё время постоянна. Упругая стена в момент удара лишь «разворачивает» горизонтальную скорость шарика. Однако, наличие стены никак не влияет на вертикальное движение: упругий шарик будет находиться в полёте столько же времени, как если бы он просто летел под углом α к горизонту.

Рассмотрим теперь горизонтальное движение **снаряда**. По условию задачи пружина не влияет на вертикальное движение снаряда, она всё время остаётся горизонтальной, и трение между ней и вертикальной стеной отсутствует. Поэтому и шарик и снаряд в полёте движутся по вертикали одинаково, «синхронно».

Пока пружина не коснулась стены, он летит равномерно, с той же горизонтальной скоростью, что и шарик. Однако, часть времени T_0 пружина будет касаться стены, в этот промежуток груз будет сначала замедляться, потом ускоряться движения, то есть его горизонтальное движение не будет равномерным.

По условию задачи пружина сжимается и успевает полностью разжаться до того как груз упал на землю. Кроме того груз по условию не ударяется о стену. Такое движение в точности соответствует половине периода колебаний груза массой m на пружине жёсткостью k, то есть занимает время $T_0 = \pi\sqrt{m/k}$.

За это время груз «развернётся» и дальше полетит от стены с той же горизонтальной скоростью, с какой налетал, и горизонтальное движение его снова станет равномерным.

Кроме промежутка времени T_0 снаряд летит по горизонтали равномерно «синхронно» с упругим шариком. Синхронность их движения по горизонтали нарушается лишь пока пружина касается стены, то есть пока шарик ближе к стене, чем длина l нерастянутой пружины.

Значит, снаряд окажется на земле в той же точке, что и шарик, если шарик пролетит по горизонтали удвоенную длину пружины (до стены и обратно) за то же время T_0, что и снаряд, пока он совершает колебательное движение: $T_0 = 2l/(V\cos\alpha)$. Отсюда

$$\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2l}{V\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m\pi^2}{k} = \frac{4l^2}{V^2\cos^2\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\pi^2 m V^2\cos^2\alpha}{4l^2}.$$

Ответ: Жёсткость пружины $k = \pi^2 m V^2 \cos^2\alpha/(4l^2)$.

Задача 5. I вариант. Обозначим диаметр линзы $|\mathrm{CB}| = d$. Рассмотрим центр масс конструкции X. Когда система придёт в положение равновесия, точка X окажется точно под шарниром A (см. рис. 5, обратите внимание, что на рисунке мы не стали поворачивать систему, а повернули сам рисунок так, чтобы AB остался вертикальным. Так рисовать нашу систему гораздо проще). Именно в таком положении вертикальная сила тяжести $3mg$ не создаёт вращательного момента относительно точки вращения A.

Обозначим угол XAB через α (см. рис. 5). Очевидно, под этим углом будет наклонена и главная оптическая ось линзы к вертикали. На рисунке 6 показан ход лучей в линзе от лампочки A – лучи AOA′ и ABA′, проходящий через фокус линзы. O – оптический центр линзы и её центр масс. Мы также обозначили $\beta = \angle\mathrm{OAB}$.

Изображение попадает в точку A′, расположение которой легко определить из формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{|\mathrm{BK}|} = \frac{1}{F} \qquad \Rightarrow \qquad |\mathrm{BK}| = \frac{Fl}{l-F}.$$

Несложно также найти $|\mathrm{AK}| = |\mathrm{BK}| + l$:

$$|\mathrm{AK}| = \frac{Fl}{l-F} + l = \frac{l^2}{l-F}.$$

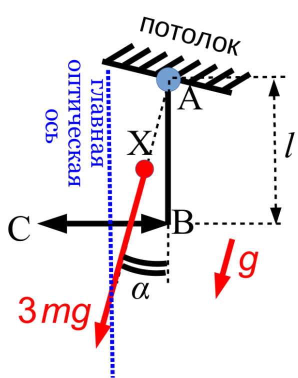

Рис. 5:

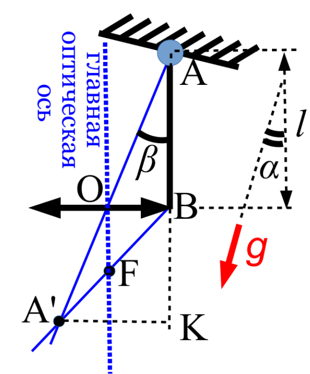

Рис. 6:

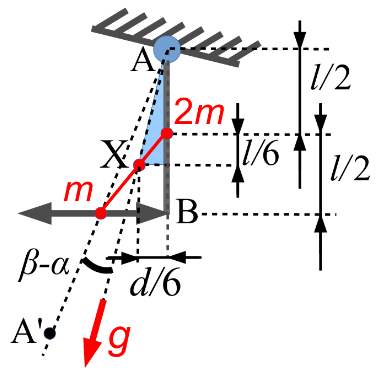

Рис. 7:

Из подобия треугольников AKA′ и ABO легко найти расстояние AA′ (с учётом $|\mathrm{OB}| = d/2$ – радиус линзы, $|\mathrm{AO}| = \sqrt{l^2 + (d/2)^2}$):

$$\frac{|\mathrm{AA'}|}{|\mathrm{AK}|} = \frac{|\mathrm{AO}|}{|\mathrm{AB}|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|\mathrm{AA'}|}{|\mathrm{AK}|} = \frac{\sqrt{l^2 + (d/2)^2}}{l} \qquad \Rightarrow \qquad |\mathrm{AA'}| = \frac{l\sqrt{l^2 + (d/2)^2}}{l-F},$$

что после использования условия $d = l/k$ приобретает вид

$$|\mathrm{AA'}| = \frac{l^2\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2}}}{l-F},$$

Теперь осталось сообразить, что расстояние до потолка – это $|AA' \cos(\beta - \alpha)|$. Действительно, нужно спроецировать отрезок AA' на перпендикуляр к потолку (см. рис. 7).

Найдём углы α и β. Фактически, угол β нам задан по условию:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\angle OAB) = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{d/2}{l} = \frac{1}{2k}.$$

Для нахождения угла α рассмотрим картинку 7: очевидно, центр масс X системы лежит на прямой, соединяющей массы m и $2m$, причём в два раза ближе к $2m$, чем в m. Поэтому, используя закрашенный голубым прямоугольный треугольник, видим

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\angle XAB) = \frac{d/6}{l/2 + l/6} = \frac{1}{4k}.$$

Теперь легко найти

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{1}{2k} - \frac{1}{4k}}{1 + \frac{1}{2k}\frac{1}{4k}} = \frac{2k}{8k^2 + 1}.$$

Зная тангенс угла, элементарно найти его косинус, поэтому сразу получаем ответ.

Ответ: на расстоянии от потолка

$$\frac{l^2\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2}}}{l - F} \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2k}{8k^2 + 1}\right)\right)$$

или, в другой форме записи,

$$\frac{l^2\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2}}}{l - F} \frac{8k^2 + 1}{\sqrt{(8k^2 + 1)^2 + 4k^2}}$$

Районный тур 2021. 11 класс. Решения.

Задача 1. II вариант. Пронумеруем конденсаторы слева направо. Соответственно, обозначим их заряды q_1, q_2, q_3, а напряжения на них U_1, U_2, U_3. Очевидно, заряды и напряжения каждого конденсатора связаны соотношением

$$q_1 = CU_1, \quad q_2 = CU_2, \quad q_3 = CU_3. \tag{12}$$

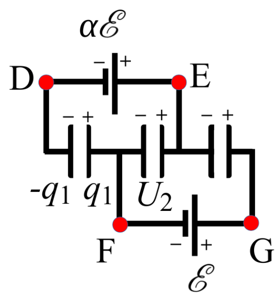

Рис. 8:

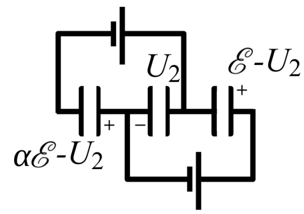

Рис. 9:

Знаки зарядов пластин каждого конденсатора выберем, как показано на рисунке 8: левые пластины заряжены отрицательно, правые – положительно, также как у источников $\mathscr{E}$ и $\alpha\mathscr{E}$. Если мы не угадали со знаком заряда пластин какого-либо конденсатора, в ответе мы просто получим отрицательное значение для этого заряда.

Используем знание ЭДС источников, чтобы связать потенциалы разных точек нашей схемы. Пусть потенциал точки D ϕ_D равен ϕ_0. Так как между D и E находится источник $\alpha\mathscr{E}$, очевидно, потенциал точки E больше, чем ϕ_0 на величину этой ЭДС:

$$\phi_D = \phi_0, \qquad \phi_E = \phi_0 + \alpha\mathscr{E}.$$

С другой стороны, точки E и F подсоединены с разных сторон к пластинам второго конденсатора, значит разность потенциалов на них в точности равна U_2, поэтому

$$\phi_F = \phi_E - U_2 = \phi_0 + \alpha\mathscr{E} - U_2.$$

Здесь мы учли, что, по нашему предположению, левая пластина 2го конденсатора заряжена отрицательно, а правая – положительно, то есть потенциал левой пластины *меньше*, чем правой.

Наконец, потенциал точки G больше, чем ϕ_F, так как между этими точками включена ЭДС величиной $\mathscr{E}$:

$$\phi_G = \phi_F + \mathscr{E} = \phi_0 + \alpha\mathscr{E} - U_2 + \mathscr{E}.$$

Зная потенциалы точек D, E, F, G можем выразить через них напряжение на каждом конденсаторе. Например, D и F подключены к разным пластинам первого конденсатора, то есть (здесь мы снова учитываем, что напряжение – потенциал положительно заряженной правой пластины минус потенциал отрицательно заряженной левой):

$$U_1 = \phi_F - \phi_D = (\phi_0 + \alpha\mathscr{E} - U_2) - \phi_0 = \alpha\mathscr{E} - U_2.$$

Аналогично, напряжение третьего конденсатора – разность потенциалов точек G и E:

$$U_3 = \phi_G - \phi_E = (\phi_0 + \alpha\mathscr{E} - U_2 + \mathscr{E}) - (\phi_0 + \alpha\mathscr{E}) = \mathscr{E} - U_2.$$

Итак, напряжения всех конденсаторов можно выразить через единственную неизвестную величину – в нашем случае U_2, значения этих напряжений мы подписали на рис. 9.

Теперь заметим, что участок схемы, выделенный на рис. 9 зелёным, должен иметь нулевой суммарный заряд, ведь, во-первых, изначально система была не заряжена, а во-вторых, эта часть схемы оставалась изолированой от остальных элементов. Источник с ЭДС $\alpha\mathscr{E}$ мог только «переносить» заряды через себя, но не порождать их. Значит, с учетом того, что заряд на правой пластине первого конденсатора обозначен у нас $+q_1$, заряд на левой пластине второго конденсатора обозначен $-q_2$, а заряд на правой пластине третьего конденсатора $+q_3$, имеем:

$$q_1 - q_2 + q_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad CU_1 - CU_2 + CU_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad U_1 - U_2 + U_3 = 0.$$

Здесь мы использовали соотношения (12). Подставляя сюда $U_1 = \alpha\mathscr{E} - U_2$ и $U_3 = \mathscr{E} - U_2$, выразим $U_2 = (1+\alpha)\mathscr{E}/3$. Теперь мы можем выразить напряжения всех конденсаторов, а значит, и их заряд:

$$Q_1 = CU_1 = \frac{2\alpha - 1}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_2 = CU_2 = \frac{1+\alpha}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_3 = CU_3 = \frac{2-\alpha}{3}C\mathscr{E}.$$

Заметим, что записывая связь между потенциалами разных точек схемы, можно было стартовать с любой точки (не обязательно D) и выражать все потенциалы не через U_2, а через U_1 или U_3, пользуясь аналогичными рассуждениями. Вместо изолированности участка схемы, выделенного зелёным, можно было наоборот, использовать условие изолированности части схемы, оставленной чёрной на рисунке 9.

Ответ: Если нумеровать конденсаторы слева направо, считая заряд положительным, когда левая пластина заряжена отрицательно, а правая положительно, то

$$Q_1 = \frac{2\alpha - 1}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_2 = \frac{1+\alpha}{3}C\mathscr{E}, \qquad Q_3 = \frac{2-\alpha}{3}C\mathscr{E}.$$

Задача 2. II вариант.

Пусть банка катится налево со скоростью v. Так как трение тела о банку велико, будем считать, что в рассматриваемый момент тело имеет ту же скорость, что и поверхность банки: движется поступательно вправо вместе с осью катящейся банки (со скоростью $\vec{v}$) и вращается вокруг оси банки против часовой стрелки с той же скоростью $\vec{v}_{\text{вращ}}$ (см. рис. 10, угол α на рисунке характеризует расположение тела относительно банки в данный момент).

Таким образом, тело имеет скорость $V = \vec{v} + \vec{v}_{\text{вращ}}$, при этом $|\vec{v}_{\text{вращ}}| = |\vec{v}|$, так как по условию задачи банка катится без проскальзывания – нижняя точка банки в каждый момент покоится относительно земли.

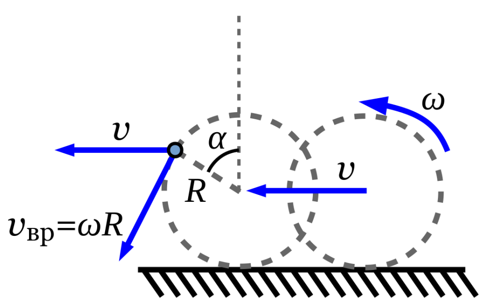

Рис. 10:

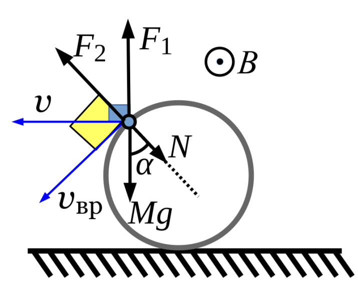

Рис. 11:

На рисунке 11 изображены силы, действующие на тело. Сила Лоренца qBV представлена в виде двух вкладов: $F_1 = QBv$ и $F_2 = QBv_{\text{вращ}} = QBv$, каждая из них направлена в соответствии с «правилом левой руки», перпендикулярно соответствующей компоненте скорости. Чтобы тело не отрывалось от поверхности банки, сила N не должна обращаться в ноль.

Запишем второй закон Ньютона для кругового движения тела. В проекции на направление r центру вращения сумма всех сил должны быть равна центростремительной силе Mv^2/R:

$$N + Mg\cos\alpha - F_2 - F_1\cos\alpha = \frac{Mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N + Mg\cos\alpha - QBv - QBv\cos\alpha = \frac{Mv^2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$N = \frac{Mv^2}{R} + QBv - (Mg - QBv)\cos\alpha. \tag{13}$$

Случай 1. Если $Mg - QBv \geq 0$ (то есть при $v \leq Mg/(QB)$), посмотрев на выражение (13), легко понять, что N минимальна, если $\cos\alpha = 1$, то есть когда тело находится в верхней точке траектории:

$$N_{min} = \frac{Mv^2}{R} + QBv - (Mg - QBv) \geq 0.$$

Неравенство в правой части мы написали, так как хотим использовать условие, что тело не отрывается от банки даже в момент, когда оно проходит верхнюю точку траектории. Решая неравенство относительно v, находим (напомним, мы интересуемся случаем $v < Mg/(QB)$ только положительными значениями скорости v):

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} - 1\right] \leq v \leq \frac{Mg}{QB}.$$

Совместны ли два этих условия? Проверим, когда нужный диапазон скоростей существует, то есть верно ли

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} - 1\right] \leq \frac{Mg}{QB}.$$

Упростим неравенство:

$$\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} \leq \frac{M^2 g}{Q^2B^2R} + 1, \quad \text{пусть } z = \frac{M^2 g}{Q^2B^2R} + 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} \leq z \quad \Rightarrow z^2 - z = z(z-1) \geq 0.$$

Последнее неравенство верно, если $z \geq 1$, но если вспомнить, как введено z, очевидно, что последнее верно всегда.

Случай 2. Если же в выражении N скобка $Mg - QBv$ неположительна (то есть при $v \geq Mg/(QB)$), посмотрев на выражение (13), легко понять, что N минимальна, если $\cos\alpha = -1$, то есть когда тело находится в нижней точке траектории:

$$N_{min} = \frac{Mv^2}{R} + QBv + (Mg - QBv) \geq 0.$$

Упрощая это неравенство $N_{min} = Mv^2/R + Mg \geq 0$, видим, что оно выполняется всегда. Поэтому в рассматриваемом случае достаточно, чтобы $v \geq Mg/(QB)$.

Объединяя случаи 1 и 2 видим, что когда колесо катится влево, достаточно потребовать

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1 + \frac{M^2 g}{Q^2B^2R}} - 1\right] \leq v.$$

Пусть теперь банка катится направо. При этом направления сил F_1 и F_2 изменятся на противоположные. Вместо ф-лы (2) будет иметь место выражение

$$N = \frac{Mv^2}{R} - QBv - (Mg + QBv)\cos\alpha. \tag{14}$$

Здесь достаточно рассмотреть единственный случай, так как по условию $Q > 0$, то есть $Mg+QBv > 0$: минимум N достигается при $\cos\alpha = 1$, неотрицательность N приобретает вид

$$N = \frac{Mv^2}{R} - 2QBv - Mg \geq 0.$$

Решая неравенство относительно v, находим (учитывая, что нас интересуют лишь положительные значения скорости v)

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1+\frac{M^2g}{Q^2B^2R}}+1\right] \leq v.$$

Ответ: Если колесо катится налево, должно быть

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1+\frac{M^2g}{Q^2B^2R}}-1\right] \leq v.$$

Если колесо катится направо, требуется

$$\frac{QBR}{M}\left[\sqrt{1+\frac{M^2g}{Q^2B^2R}}+1\right] \leq v.$$

Задача 3. II вариант. Обозначим P_a – атмосферное дваление.

Плотность атмосферного воздуха зависит от его температуры T_0, несложно найти эту зависимость по уравнению Клапейрона-Менделеева, записав последнее для массы воздуха M в некотором объёме V:

$$P_aV = \frac{M}{\mu_{\text{в}}}RT_0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P_a\mu_{\text{в}}}{RT_0} = \frac{M}{V} \equiv \rho_0. \tag{15}$$

Очевидно, если температура воздуха увеличивается до T (при неизменном атмосферном давлении), его плотность становится равна

$$\frac{P_a\mu_{\text{в}}}{RT} \equiv \rho. \tag{16}$$

Пусть m – масса гелия внутри аппарата, V_0 – суммарный объём обоих отсеков аппарата, V – объём верхнего отсека (с гелием) в начале. Давление воздуха в нижнем отсеке, а также давление гелия равны по условию P_a. Для объёма V можно написать выражение, связывающее его с состоянием гелия по уравнению Клапейрона-Менделеева:

$$P_aV = \frac{m}{\mu_{\text{не}}}RT_0 \Rightarrow \qquad V = \frac{mRT_0}{P_a\mu_{\text{не}}}. \tag{17}$$

Вначале, когда температура системы была равна T_0, подъёмная сила, действующая на груз, была разностью силы Архимеда, действующей на аппарат со стороны атмосферы ρ_0gV и суммарныйо веса: вес аппарата F_0, вес гелия mg и вес воздуха в нижнем отсеке $\rho_0g(V-V_0)$:

$$F_1 = \rho_0gV_0 - [F_0 + mg + \rho_0g(V_0 - V)] = \rho_0gV - mg - F_0. \tag{18}$$

Это и есть максимальный вес груза, который поднимает в этом случае аппарат. Подставляя сюда ρ_0 и V из (15, 17), получим

$$F_1 = \frac{P_a\mu_{\text{в}}}{RT_0}g\frac{mRT_0}{P_a\mu_{\text{не}}} - mg - F_0 = mg\left(\frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{не}}}-1\right) - F_0.$$

Это возволяет найти вес гелия,

$$mg = \frac{F_0 + F_1}{\mu_{\text{в}}/\mu_{\text{не}} - 1} \tag{19}$$

Когда воздух в нижнем отсеке нагрелся, гелий вначале не изменил свою температуру T_0 (и давление у него по-прежнему атмосферное), а значит объём V верхнего отсека ещё не изменился. Зато плотность (и вес) воздуха в нижнем отсеке изменилась. Поэтому и подъёмная сила вместо ф-лы (18) будет иметь вид

$$F_2 = \rho_0 g V_0 - [F_0 + mg + \rho g(V_0 - V)] = (\rho_0 - \rho) g V_0 - F_0 - mg + \rho g V. \tag{20}$$

Наконец, когда гелий также нагрелся, объём верхнего отсека стал равен V', который вычисляется аналогично ф-ле (17)

$$P_a V' = \frac{m}{\mu_{\text{не}}} RT \qquad \Rightarrow \qquad V' = \frac{mRT}{P_a \mu_{\text{не}}}. \tag{21}$$

При этом подъёмная сила аппарата также изменится по сравнению с (20) и станет равна

$$F_3 = \rho_0 g V_0 - [F_0 + mg + \rho g(V_0 - V')] = (\rho_0 - \rho) g V_0 - F_0 - mg + \rho g V'. \tag{22}$$

Сравнивая (20) и (22), видим, что всё, кроме последнего слагаемого у них одинаковое. Значит, чтобы получить F_2 из F_3, нужно написать

$$F_2 = F_3 + \rho g V - \rho g V'$$

Подставляя сюда ρ из (16), V и V' из (17,21), получим

$$F_2 = F_3 + \frac{P_a \mu_{\text{в}}}{RT} g \frac{mRT_0}{P_a \mu_{\text{не}}} - \frac{P_a \mu_{\text{в}}}{RT} g \frac{mRT}{P_a \mu_{\text{не}}} = F_2 + mg \frac{T_0 \mu_{\text{в}}}{T \mu_{\text{не}}} - mg \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{не}}} = F_2 - mg \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{не}}} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right).$$

Подставляя сюда mg из (19), получим ответ.

Ответ:

$$F_2 = F_3 - \frac{(F_0 + F_1)k}{k - 1} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right), \qquad \text{где} \quad k = \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{не}}}.$$

Задача 4. II вариант. Рассмотрим сначала горизонтальное движение упругого **шарика**. Горизонтальная скорость его движения $V \cos\alpha$ всё время постоянна. Упругая стена в момент удара лишь «разворачивает» горизонтальную скорость шарика. Однако, наличие стены никак не влияет на вертикальное движение: упругий шарик будет находиться в полёте столько же времени, как если бы он просто летел под углом α к горизонту.

Рассмотрим теперь горизонтальное движение **снаряда**. По условию задачи пружина не влияет на вертикальное движение снаряда, она всё время остаётся горизонтальной, и трение между ней и вертикальной стеной отсутствует. Поэтому и шарик и снаряд в полёте движутся по вертикали одинаково, «синхронно».

Пока пружина не коснулась стены, он летит равномерно, с той же горизонтальной скоростью, что и шарик. Однако, часть времени T_0 пружина будет касаться стены, в этот промежуток груз будет сначала замедляться, потом ускоряться движения, то есть его горизонтальное движение не будет равномерным.

По условию задачи пружина сжимается и успевает полностью разжаться до того как груз упал на землю. Кроме того груз по условию не ударяется о стену. Такое движение в точности соответствует половине периода колебаний груза массой m на пружине жёсткостью k, то есть занимает время $T_0 = \pi\sqrt{m/k}$.

За это время груз «развернётся» и дальше полетит от стены с той же горизонтальной скоростью, с какой налетал, и горизонтальное движение его снова станет равномерным.

Кроме промежутка времени T_0 снаряд летит по горизонтали равномерно «синхронно» с упругим шариком. Синхронность их движения по горизонтали нарушается лишь пока пружина касается стены, то есть пока шарик ближе к стене, чем длина l нерастянутой пружины.

Значит, снаряд окажется на земле в той же точке, что и шарик, если шарик пролетит по горизонтали удвоенную длину пружины (до стены и обратно) за то же время T_0, что и снаряд, пока он совершает колебательное движение: $T_0 = 2l/(V\cos\alpha)$. Отсюда

$$\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2l}{V\cos\alpha} \qquad\Rightarrow\qquad \frac{m\pi^2}{k} = \frac{4l^2}{V^2\cos^2\alpha} \qquad\Rightarrow\qquad m = \frac{4kl^2}{\pi^2V^2\cos^2\alpha}.$$

Ответ: Масса снаряда $m = 4kl^2/(\pi^2V^2\cos^2\alpha)$.

Задача 5. II вариант. Обозначим диаметр линзы $|\mathrm{CB}| = d$. Рассмотрим центр масс конструкции X. Когда система придёт в положение равновесия, точка X окажется точно под шарниром A (см. рис. 12, обратите внимание, что на рисунке мы не стали поворачивать систему, а повернули сам рисунок так, чтобы AB остался вертикальным. Так рисовать нашу систему гораздо проще). Именно в таком положении вертикальная сила тяжести $3mg$ не создаёт вращательного момента относительно точки вращения A.

Обозначим угол XAB через α (см. рис. 12). Очевидно, под этим углом будет наклонена и главная оптическая ось линзы к вертикали. На рисунке 13 показан ход лучей в линзе от лампочки A – лучи $\mathrm{AOA'}$ и $\mathrm{ABA'}$, проходящий через фокус линзы. O – оптический центр линзы и её центр масс. Мы также обозначили $\beta = \angle\mathrm{OAB}$.

Изображение попадает в точку $\mathrm{A'}$, расположение которой легко определить из формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{|\mathrm{BK}|} = \frac{1}{F} \qquad\Rightarrow\qquad |\mathrm{BK}| = \frac{Fl}{l-F}.$$

Несложно также найти $|\mathrm{AK}| = |\mathrm{BK}| + l$:

$$|\mathrm{AK}| = \frac{Fl}{l-F} + l = \frac{l^2}{l-F}.$$

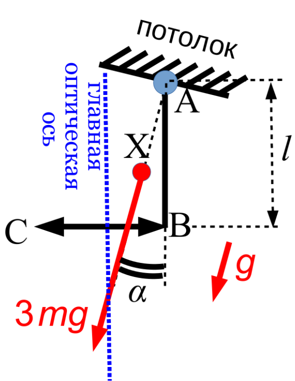

Рис. 12:

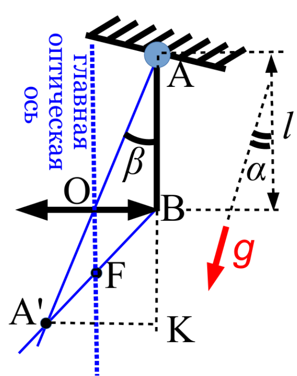

Рис. 13:

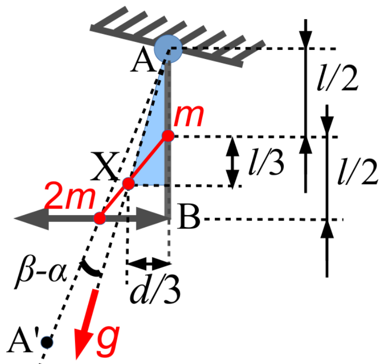

Рис. 14:

Из подобия треугольников $\mathrm{AKA'}$ и ABO легко найти расстояние $\mathrm{AA'}$ (с учётом $|\mathrm{OB}| = d/2$ – радиус линзы, $|\mathrm{AO}| = \sqrt{l^2 + (d/2)^2}$):

$$\frac{|\mathrm{AA'}|}{|\mathrm{AK}|} = \frac{|\mathrm{AO}|}{|\mathrm{AB}|} \qquad\Rightarrow\qquad \frac{|\mathrm{AA'}|}{|\mathrm{AK}|} = \frac{\sqrt{l^2+(d/2)^2}}{l} \qquad\Rightarrow\qquad |\mathrm{AA'}| = \frac{l\sqrt{l^2+(d/2)^2}}{l-F},$$

что после использования условия $d = l/k$ приобретает вид

$$|\mathrm{AA'}| = \frac{l^2\sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}}{l-F},$$

Теперь осталось сообразить, что расстояние до потолка – это $|\mathrm{AA}'\cos(\beta-\alpha)|$. Действительно, нужно спроецировать отрезок AA' на перпендикуляр к потолку (см. рис. 14).

Найдём углы α и β. Фактически, угол β нам задан по условию:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\angle OAB) = \frac{|\mathrm{OB}|}{|\mathrm{OA}|} = \frac{d/2}{l} = \frac{1}{2k}.$$

Для нахождения угла α рассмотрим картинку 14: очевидно, центр масс X системы лежит на прямой, соединяющей массы m и $2m$, причём в два раза ближе к $2m$, чем в m. Поэтому, используя закрашенный голубым прямоугольный треугольник, видим

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\angle XAB) = \frac{d/3}{l/2 + l/3} = \frac{2}{5k}.$$

Теперь легко найти

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{1}{2k}-\frac{2}{5k}}{1+\frac{1}{2k}\frac{2}{5k}} = \frac{k}{10k^2+2}.$$

Зная тангенс угла, элементарно найти его косинус, поэтому сразу получаем ответ.

Ответ: на расстоянии от потолка

$$\frac{l^2\sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}}{l-F}\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{10k^2+2}\right)\right)$$

или, в другой форме записи,

$$\frac{l^2\sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}}{l-F}\frac{10k^2+2}{\sqrt{(10k^2+2)^2+k^2}}$$