Городской тур 2020/21. 10 класс

Задача 1.

Обозначим точку встречи космонавта и астероида через O (см. Рис. 1): $x \equiv |\mathrm{BO}| = L\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $l \equiv |\mathrm{CO}| = L/\cos\alpha$.

Сперва найдем скорость u, с которой космонавт должен оттолкнуться от космической станции, чтобы вовремя долететь до прямой AB. Приравняем времена полета

$$\frac{2L-x}{v} = \frac{l}{u} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{v}{2\cos\alpha - \sin\alpha}\,. \tag{1}$$

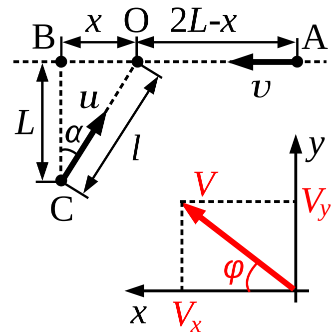

Рис. 1:

Заметим, что $\mathrm{tg}\,\alpha < 2$. В противном случае космонавт ни при какой скорости u не сможет добраться до астероида.

Используя закон сохранения импульса, выразим скорость V совместного движения космонавта и астероида после столкновения. В проекции на оси системы координат, показанной на Рис. 1, имеем

$$2mv - mu\sin\alpha = 3mV_x \quad \Leftrightarrow \quad V_x = \frac{2v - u\sin\alpha}{3}\,, \tag{2}$$

$$mu\cos\alpha = 3mV_y \quad \Leftrightarrow \quad V_y = \frac{u\cos\alpha}{3}\,. \tag{3}$$

Таким образом, скорость космонавта и астероида после столкновения равна

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{1}{3}\sqrt{u^2 + 4v^2 - 4uv\sin\alpha}\,. \tag{4}$$

Рассмотрим, как ориентирован вектор скорости. Для этого вычислим угол φ (см. Рис. 1):

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{V_y}{V_x} = \frac{u\cos\alpha}{2v - u\sin\alpha} = \frac{1}{4 - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,. \tag{5}$$

Если $4/3 < \mathrm{tg}\,\alpha < 2$, то $\mathrm{tg}\,\varphi < 0$, и угол $\varphi > \pi/2$. При этом космонавт и астероид удаляются от станции. Очевидно, что для возвращения на станцию необходимо погасить весь импульс. После этого бесконечно малый импульс в направлении станции позволит вернуться назад. Таким образом, минимальный необходимый импульс равен $\Delta P = 3mV$. Если $-\pi/2 < \alpha < 0$, то есть космонавт прыгает “по направлению” движения астероида, то возникает аналогичная ситуация: после столкновения они продолжают удаляться от станции. Следовательно, при $-\pi/2 < \alpha < 0$ ответ вновь $\Delta P = 3mV$.

Рассмотрим более детально случай $0 < \mathrm{tg}\,\alpha < 4/3$. Сравним углы φ и α, для чего решим неравенство

$$\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\alpha < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - 4\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{4 - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha} < 0\,. \tag{6}$$

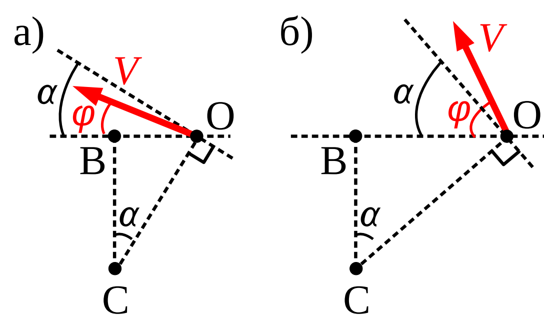

Рис. 2:

Получаем, что если $1/3 < \mathrm{tg}\,\alpha < 1$, то есть $\mathrm{arctg}\,1/3 < \alpha < \pi/4$, выполняется условие $\varphi < \alpha$. Данная ситуация изображена на Рис. 2а. Видно, что в этом случае у скорости V есть составляющая, направленная к станции. А значит, для возвращения на станцию достаточно погасить только перпендикулярную составляющую полного импульса. Полный импульс равен векторной сумме импульсов космонавта и астероида до столкновения. Составляющую, перпендикулярную прямой CO, до столкновения имел только астероид. Следовательно, минимальное необходимое изменение импульса равно $\Delta P = 3mV\cos(\alpha - \varphi) = 2mv\cos\alpha$. В противном случае, $0 < \alpha < \mathrm{arctg}\,1/3$ или $\pi/4 < \alpha < \mathrm{arctg}\,4/3$, изображенном на Рис. 2б, после столкновения космонавт и астероид опять удаляются от станции, и ответ $\Delta P = 3mV$.

В заключение заметим, что если скорость V направлена таким образом, что космонавт и астероид удаляются от станции, то без разницы, когда именно космонавт использует реактивный рюкзак. Напротив, если имеет место сближение со станцией, то изменение импульса необходимо выполнить сразу после столкновения в точке О. Если импульс не изменить в точке О, то при движении со скоростью V направление на станцию будет изменяется, а угол $\alpha(t)$ эффективно уменьшаться, а значит, $\cos(\alpha(t)-\varphi)$ будет увеличиваться. Так будет происходить до тех пор, пока космонавт и астероид не пройдут точку максимального сближения со станцией (при этом $\alpha(t)=\varphi$), после этого они начнут удаляться.

Ответ: Если $-\pi/2<\alpha<\operatorname{arctg}1/3$ или $\pi/4\leqslant\alpha<\operatorname{arctg}2$, то минимальное необходимое изменение импульса составляет $\Delta P=3mV$. Если $\operatorname{arctg}1/3\leqslant\alpha<\pi/4$, то $\Delta P=2mv\cos\alpha$. При $\alpha\geqslant\operatorname{arctg}2$ космонавт не встретится с астероидом. Скорость V задана в уравнении (4), где скорость u определена в уравнении (1).

Задача 2.

Обозначим модуль скорости мячика прямо перед ударом о брусок за v, а после удара — за u. Величина изменения импульса мячика равна $\Delta p=m(u+v)$. Пусть на мячик со стороны бруска действует некоторая сила большой величины F в течение малого промежутка времени Δt. Тогда выполняется соотношение $\Delta p=F\Delta t$. По 3-му закону Ньютона со стороны мячика на брусок действует сила, такая же по модулю, но направленная горизонтально вправо. Чтобы понять, как будет двигаться брусок сразу после удара, рассмотрим его динамику под действием горизонтальной силы, приложенной к ребру G.

Правый нижний угол бруска (точка E) будет двигаться вправо с некоторым горизонтальным ускорением величины a_0. Для решения задачи удобно перейти в систему отсчета, связанную с точкой E. В этой неинерциальной системе отсчета следует учесть дополнительную силу инерции, приложенную к центру бруска C, направленную горизонтально влево и имеющую модуль $F'=Ma_0$. Остальные силы, действующие на брусок, указаны на Рис. 3. При достаточно больших значениях F брусок начнет вращаться относительно оси E. Поскольку нас в дальнейшем будет интересовать предел очень больших F, мы сразу учтем, что сила реакции со стороны пола приложена к точке опоры E. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на оси x и y:

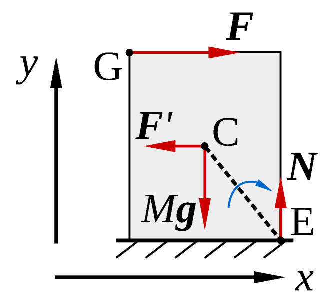

Рис. 3:

$$Ma_x'=F-Ma_0, \tag{7}$$
$$Ma_y=N-Mg. \tag{8}$$

Здесь горизонтальную проекцию ускорения центра масс мы обозначили штрихом. Она связана с проекцией ускорения в исходной системе отсчета простым соотношением $a_x=a_0+a_x'$. При этом вертикальные проекции ускорений в обеих системах отсчета совпадают. Недостающее уравнение для описания динамики вращения бруска можно выписать, заметив, что моменты всех сил относительно оси, проходящий через центр бруска C, должны быть скомпенсированы, поскольку вся его масса сосредоточена в центре. Это позволяет записать

$$N\,\frac{b}{2}=F\,\frac{c}{2}, \tag{9}$$

где ширина и высота бруска обозначены соответственно за b и c. Наконец, нужно учесть, что ускорение центра бруска в системе отсчета точки E направлено перпендикулярно прямой EC. Нормальная составляющая вдоль EC отсутствует, т. к. брусок в начальный момент покоится. Это условие можно записать в виде

$$\frac{a_x'}{a_y}=\frac{c}{b}. \tag{10}$$

Теперь уравнения (7)–(10) можно легко решить, считая пока, что сила F известна:

$$a_x'=\frac{c^2}{b^2}\,\frac{F}{M}-\frac{2g}{b}, \tag{11}$$
$$a_y=\frac{c}{b}\,\frac{F}{M}-g, \tag{12}$$
$$a_0=\frac{F}{M}-a_x'. \tag{13}$$

Заметим, что для нахождения данных ускорений также можно было записать основное уравнение динамики вращательного движения в форме $I_\mathrm{E}\beta=M_\mathrm{E}$, где момент инерции относительно оси E равен $I_\mathrm{E}=M(b^2+c^2)/4$, β

— угловое ускорение, M_{E} — суммарный момент сил относительно оси E. Из уравнения (12) видно, что вращение возникает, если величина F удовлетворяет условию $F > (b/c)Mg$. Если бы точка G была зафиксирована в исходной системе отсчета, то условие вращения бруска в терминах F получалось бы сразу же из рассмотрения моментов сил и имело бы вид $F > (b/2c)Mg$, т. е. было бы в два раза слабее.

Теперь можно перейти к пределу $F \to \infty$, $\Delta t \to 0$ при $F\Delta t = \Delta p = \mathrm{const}$ и найти проекции скорости центра масс бруска в исходной системе отсчета:

$$v_{\mathrm{C}x} = a_x \Delta t \to \frac{\Delta p}{M}, \tag{14}$$

$$v_{\mathrm{C}y} = a_y \Delta t \to \frac{c}{b}\,\frac{\Delta p}{M}. \tag{15}$$

Здесь мы учли то, что импульс силы тяжести стремится к нулю в пределе мгновенного удара мячика о брусок, т. е. $g\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Мы связали скорости мячика и центра масс бруска после удара со скоростью мячика до удара и величиной переданного импульса Δp. Теперь, чтобы исключить Δp, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{M(v_{\mathrm{C}x}^2 + v_{\mathrm{C}y}^2)}{2}\,. \tag{16}$$

С учетом результатов (14) и (15), а также $\Delta p = m(u+v)$ получаем

$$\frac{u}{v} = \frac{1 - (m/M)(1 + c^2/b^2)}{1 + (m/M)(1 + c^2/b^2)}\,. \tag{17}$$

Для того, чтобы ответить теперь на вопрос задачи, заметим, что отношение расстояний |AF| и |BF| равно отношению скоростей v и u. Проще всего это понять, если обратить движение мячика на участке AG. Так как время полета определяется только высотой |FG|, оно одинаково для траекторий GA и GB. При этом горизонтальная проекция скорости не меняется со временем, так что дальность полета (соответственно |FA| и |FB|) равна произведению времени полета и скорости (v и u). Таким образом, $|\mathrm{BF}| = (u/v)L$, откуда следует

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AF}| - |\mathrm{BF}| = \frac{2(m/M)(1 + c^2/b^2)}{1 + (m/M)(1 + c^2/b^2)}\,L = \frac{10m/M}{1 + 5m/M}\,L\,. \tag{18}$$

В последнем равенстве мы учли, что по условию задачи $c/b = 2$. Рассмотрим предельные случаи. Если масса мячика m много меньше массы бруска M, то отрезок AB имеет очень малую величину: $|\mathrm{AB}| \approx 10(m/M)L$. Предельный переход $m/M \to 0$ отвечает тому, что мы заменяем брусок на неподвижную (бесконечно массивную) стену, от которой мячик отскакивает, никак не изменяя своей энергии. Если же брусок очень легкий по сравнению с мячиком, т. е. $M \ll m$, то величина отрезка AB близка к $2L$. Это соответствует тому, что мячик, "почти не заметив" столкновения с бруском в вершине своей траектории, пролетит второй участок параболы и приземлится на расстоянии $2L$ от исходной точки A.

В заключение отметим, что для решения задачи введение ненулевого времени удара Δt не является обязательным. Вместо этого можно было сразу записать законы сохранения энергии, импульса и момента импульса, имеющие следующий вид:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{M(v_{\mathrm{C}x}^2 + v_{\mathrm{C}y}^2)}{2}\,, \tag{19}$$

$$mv = -mu + Mv_{\mathrm{C}x}\,, \tag{20}$$

$$mvc = -muc + Mv_{\mathrm{C}x}\,\frac{c}{2} + Mv_{\mathrm{C}y}\,\frac{b}{2}\,. \tag{21}$$

Мы записали закон сохранения импульса лишь в проекции на горизонтальную ось, поскольку в этом направлении не действуют внешние силы. Импульс бруска $Mv_{\mathrm{c}y}$ в вертикальном направлении возникает за счет ненулевого импульса силы реакции N — как и сила F, она стремится к бесконечности в пределе $\Delta t \to 0$ в соответствии с уравнениями (9) и (15). Так как сила реакции N имеет нулевое плечо относительно оси E, она не влияет на сохранение момента импульса относительно данной оси, что позволяет записать уравнение (21). Очевидно, сила N также не совершает работу, что приводит к (19). Решая систему (19)–(21) относительно u, $v_{\mathrm{C}x}$ и $v_{\mathrm{C}y}$, мы приходим к выражению (17).

Ответ: $\mathrm{AB} = 10(m/M)L/(1+5m/M)$.

Задача 3.

Рассмотрим случай, когда линзу Л$_2$ удерживают. Единственная конфигурация, обеспечивающая параллельный пучок на выходе из системы линз — когда первая линза формирует действительное изображение, попадающее в фокус второй линзы. По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}\,, \tag{22}$$

где $d = 2F$ — расстояние от Л$_1$ до источника, находим расстояние от Л$_1$ до изображения S$_1$: $f = 2F$. Поскольку оно попадает в фокус второй линзы, расстояние между линзами (т.е. длина ненапряженной пружинки) равно $x_0 = 2F + F = 3F$.

Рассмотрим теперь случай, когда линза Л$_2$ висит на пружинке, растягивая ее своим весом mg до длины x. Массу линзы можно найти из закона Гука: $m = ky/g$, если известно изменение длины пружины $y = x - x_0$. Найдем его. Опять применим формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1}\,, \tag{23}$$

где $d_1 = x - 2F = y + F$ — расстояние от Л$_2$ до первого изображения S$_1$, которое теперь играет роль источника, f_1 — расстояние от Л$_2$ до второго изображения S$_2$ (см. Рис. 4). Отсюда находим

$$f_1 = F\frac{y+F}{y}\,. \tag{24}$$

По условию $|\mathrm{SS}_2| = 9F$, отсюда получаем уравнение на y:

$$6F + y + \frac{F^2}{y} = 9F\,. \tag{25}$$

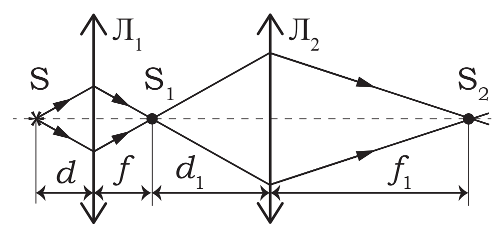

Рис. 4:

Домножая левую и правую части уравнения на y и приводя подобные, получаем:

$$y^2 - 3Fy + F^2 = 0\,, \tag{26}$$

откуда

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}F\,. \tag{27}$$

Таким образом, два разных положения второй линзы Л$_2$ приводят к одному и тому же положению изображения S$_2$. Соответственно, возможны две разные массы линзы Л$_2$: $m = kF(3 \pm \sqrt{5})/(2g)$.

Ответ: $m = kF(3 \pm \sqrt{5})/(2g)$.

Задача 4.

Рассмотрим первый случай с N шарами. При соединении шаров друг с другом газ перераспределится в них так, что давление во всех шарах будет одинаковым и равным P_0 (это условие механического равновесия). При этом суммарное количество вещества сохранится (пренебрегаем газом в трубках и в манометре):

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i = N\nu_0\,, \tag{28}$$

где ν_0 — количество вещества в каждом шаре до соединения шаров трубками, ν_i — количество вещества в шаре i после соединения шаров и перераспределения молекул. Поскольку в шарах поддерживается определенная температура, можно записать закон Менделеева-Клапейрона для газа в каждом шаре:

$$P_0V = \nu_i RT_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,, \tag{29}$$

где V — объем шара. Выразим неизвестную величину ν_i из (29) и подставим в (28):

$$\frac{P_0 V}{R}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T_i} = N\nu_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T_i} = N\frac{R\nu_0}{P_0 V}\,. \tag{30}$$

После подключения $(N+1)$-го шара с температурой T_{N+1} газ вновь перераспределится, создавая давление P в системе. (В какую именно точку цепочки подключен новый шар — не важно.) Для этого случая выполняются аналогичные формулам (28), (29) соотношения. Поэтому можно обобщить формулу (30) на случай $(N+1)$ шаров:

$$\Theta + \frac{1}{T_{N+1}} = (N+1)\frac{R\nu_0}{PV}\,, \tag{31}$$

где мы ввели обозначение

$$\Theta \equiv \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T_i}\,. \tag{32}$$

Чтобы исключить неизвестные параметры R, ν_0, V, поделим (31) на (30):

$$\frac{\Theta + T_{N+1}^{-1}}{\Theta} = \frac{(N+1)P_0}{NP} \quad \Rightarrow \quad T_{N+1} = \Theta^{-1}\left[\frac{(N+1)P_0}{NP} - 1\right]^{-1}\,. \tag{33}$$

Поскольку абсолютная температура не может быть меньше нуля, создать давление P за счет присоединения шара возможно только при $(N+1)P_0 > NP$.

Ответ: если $(N+1)P_0 > NP$, то температура $(N+1)$-го шара определяется формулой (33); в противном случае создать давление P невозможно.

Задача 5.

Для того чтобы элемент D "открылся", и по нему начал протекать ток, необходимо приложить напряжение U_0. В зависимости от напряжения U, приложенного между точками A и B, в схеме может быть "открыто" разное количество элементов. Рассмотрим ситуацию, когда в схеме "открыто" n вертикальных элементов. Обозначим токи через первый резистор и горизонтальные элементы так, как это показано на Рис. 5, отметим, что все токи должны быть положительны. Тогда по первому закону Кирхгофа токи через вертикальные участки схемы, если перечислять их слева направо, равны $I_1 - I_2$, $I_2 - I_3$, $I_3 - I_4$, $\ldots$, $I_{n-2} - I_{n-1}$, $I_{n-1} - I_n$ и I_n.

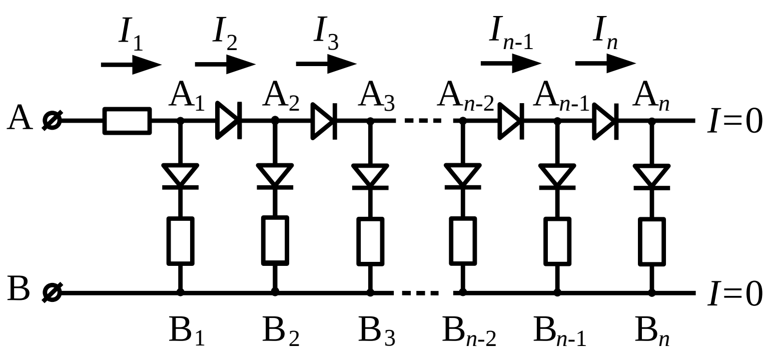

Рис. 5:

Составим систему уравнений для токов I_k с $k = 1\ldots n$. Для этого приравняем напряжения на участках AB и

AA_1B_1B, A_1B_1 и $A_1A_2B_2B_1$, …, $A_{n-1}B_{n-1}$ и $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$:

$$
\begin{aligned}
U &= I_1R + U_0 + (I_1 - I_2)R,\\
U_0 + (I_1 - I_2)R &= U_0 + U_0 + (I_2 - I_3)R,\\
U_0 + (I_2 - I_3)R &= U_0 + U_0 + (I_3 - I_4)R,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
U_0 + (I_{n-2} - I_{n-1})R &= U_0 + U_0 + (I_{n-1} - I_n)R,\\
U_0 + (I_{n-1} - I_n)R &= U_0 + U_0 + I_nR,
\end{aligned}
$$

После сокращения общих вкладов данную систему удобно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{U_0 - U}{R} &= -2I_1 + I_2,\\
\frac{U_0}{R} &= I_1 - 2I_2 + I_3,\\
\frac{U_0}{R} &= I_2 - 2I_3 + I_4,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{U_0}{R} &= I_{n-2} - 2I_{n-1} + I_n,\\
\frac{U_0}{R} &= I_{n-1} - 2I_n,
\end{aligned}
$$

Используя полученные уравнения и считая, что напряжение U известно, можно найти все токи в общем случае. Однако вместо этого мы рассмотрим пограничную ситуацию, когда два элемента D на участке $A_{n-1}A_nB_n$ только "открываются", при этом ток через них равен нулю: $I_n = 0$. В этом случае система значительно упрощается, и мы получаем рекуррентное соотношение для токов

$$
I_n = 0\,, \qquad I_{n-1} = \frac{U_0}{R}\,, \qquad I_{n-k} = \frac{U_0}{R} + 2I_{n-k+1} - I_{n-k+2}\,. \tag{34}
$$

Посчитав первые несколько токов, $I_{n-2} = 3U_0/R$, $I_{n-3} = 6U_0/R$, $I_{n-4} = 10U_0/R$, легко угадать вид общего решения:

$$
I^{(n)}_{n-k} = (1 + 2 + \ldots + k)\frac{U_0}{R} = \frac{(1+k)k}{2}\frac{U_0}{R}\,. \tag{35}
$$

Подставив (35) в (34), убеждаемся в правильности найденной формулы. Мы добавили индекс (n), чтобы подчеркнуть, что соответствующие решения относятся к ситуации, когда "открывается" участок $A_{n-1}A_nB_n$.

Воспользовавшись формулой (35), найдем, какой ток течет на участке A_1A_2. При $k = n-2$ имеем

$$
I^{(n)}_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{U_0}{R}\,. \tag{36}
$$

Когда открываются следующие два элемента с участка $A_nA_{n+1}B_{n+1}$, ток I_2 становится равен (заменяем $n \to n+1$ в (36)):

$$
I^{(n+1)}_2 = \frac{n(n-1)}{2}\frac{U_0}{R}\,. \tag{37}
$$

По условию ток на участке A_1A_2 равен $I_2 = 2021U_0/R$. Найдем, при каком n ток $I_2 \in [I^{(n)}_2, I^{(n+1)}_2]$. Проще всего это сделать, формально рассматривая n как произвольное положительное вещественное число и решая уравнение

$$
\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2021 \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{3 + \sqrt{16169}}{2} \approx 65.1\,. \tag{38}
$$

Таким образом, когда на участке A_1A_2 ток равен $I_2 = 2021U_0/R$, "открыты" (и через них течет ненулевой ток) все элементы D вплоть до участка $A_{64}A_{65}B_{65}$. Следовательно, ток течет через $N = 2n - 1 = 129$ элементов D.

Ответ: 129.