10 класс

10 класс. Задача 1: “Истечение из шприца”

Известно, что время истечения жидкости из отверстия в цилиндрическом сосуде зависит от характерных параметров как

$$t = kS^{\alpha}S_0^{\beta}\left(H^{\gamma} - H_0{}^{\gamma}\right),$$

где S – площадь отверстия, S_0 – площадь сечения цилиндра, H – высота столба жидкости, H_0 – длина носика шприца, k, α, β, γ – постоянные коэффициенты, причем α, β и γ принимают безразмерные рациональные значения.

Задание

1. Исследуйте, как зависит время истечения воды из сосуда от высоты столба жидкости.
2. Исследуйте, как зависит время истечения воды из сосуда от площади сечения отверстия.
3. Определите параметры k, α, β и γ.

Оборудование: шприц 150 мл, шприц 2 мл, секундомер, скотч, миллиметровая бумага.

Решение

Если бы мы имели цилиндрическую трубу с одинаковыми площадями сверху и снизу $S = S_0$, то время истечения было бы равно времени падения жидкости с высоты H,

$$H = \frac{gt^2}{2}\ ,\ t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\ . \tag{1}$$

Поэтому предполагаем, что $\left[k\right] = \frac{\text{с}}{\sqrt{\text{м}}}$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Проверим эту гипотезу экспериментально, замеряя время истечения при нескольких различных высотах столба жидкости. Строим график зависимости t от $\sqrt{H}$ и убеждаемся, что это прямая линия.

Из соображений размерности, $\beta = -\alpha$. Для нахождения α закроем скотчем половину отверстия шприца $S_1 = S/2$ и замерим время истечения воды. Время удвоилось: $t_1 = 2t$, поэтому $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Альтернативный способ – сопоставить время истечения из двух шприцов с разными отношениями площадей отверстия и цилиндра.

$$t = k\frac{S_0}{S}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right).$$

С помощью линейки определяем диаметр выходного отверстия большого шприца (3 мм) и внутренний диаметр цилиндра (3.9 см). Площади находим по измеренным диаметрам отверстий. По угловому коэффициенту прямой t от $\sqrt{H}$ определяем k. Сравниваем его с $\sqrt{2/g} = 0.452$ с/м$^{0.5}$.

Комментарий: теоретическая формула для времени истечения

$$t = \sqrt{2\frac{S_0^2 - S^2}{gS^2}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right) = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{R_0^4}{R^4} - 1\right)}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right),$$

где H – высота столба жидкости, R_0 – радиус верхней части цилиндра, R – радиус отверстия. При $R << R_0$

$$t = \frac{R_0^2}{R^2}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right).$$

Критерии оценивания

1. Записана формула (1) и предположено, что $\gamma = 1/2$. — 1 балл
2. Проделаны измерения *t* от *h*. Данные сведены в таблицу. — 1 балл
3. Проделаны повторные измерения. — 1 балл
4. Построен график t от $\sqrt{H}$. Верно обозначены оси, единицы измерения, шкалы по осям, масштаб, точки соответствуют таблице — 3 балла
5. Проведен замер времени истечения при закрытой половине площади отверстия шприца — 1 балл
6. Определено α — 2 балл
7. Определено β — 2 балл
8. Определено *k* — 2 балл
9. Проведено сопоставление полученного значения с $k_{теор} = \sqrt{2/g} = 0.452$ с/м$^{0.5}$ — 1 балл
10. Оценены погрешности *k* — 1 балл

10 класс. Задача 2: “Измерение ЭДС”

Компенсационный метод измерения основан на компенсации измеряемого напряжения (или ЭДС) падением напряжения на известном сопротивлении при прохождении тока от вспомогательного источника. Схема измерения ЭДС компенсационным методом приведена на рисунке. На схеме обозначены: исследуемый источник $G1$, эталонный источник $G2$ с известной ЭДС $\mathcal{E}_2 = 1.275\ \text{В}$, вспомогательный источник $G3$ с неизвестной ЭДС. Внутренние сопротивления всех источников равны $10\ \text{Ом}$ и пренебрежимо малы по сравнению с сопротивлениями остальных элементов схемы. Максимальное сопротивление переменного резистора $R_2 = 30\ \text{кОм}$ соответствует максимальному значению числа n, появляющегося в цифровом окошечке.

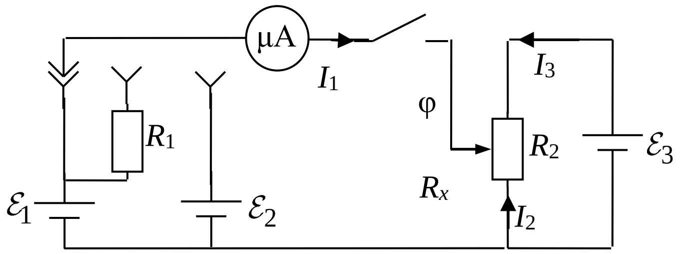
Задание:

1. Соберите измерительную схему.
2. Определите значение $\mathcal{E}_1$ исследуемого источника.
3. Определите значение $\mathcal{E}_3$ вспомогательного источника.
4. Определите значение внутреннего сопротивления микроамперметра.
5. Определите значение дополнительного сопротивления R_1, введенного последовательно с источником $G1$.

Оборудование: Лабораторный макет, провода. Альтернатива: виртуальный макет идентичный реальному.

Решение

1. Соберем схему:



2. Подключим источник $G2$. Подберем значение сопротивления R_x нижней части реостата таким образом, чтобы ток через микроамперметр отсутствовал. При этом показания потенциометра $n_0 = 1.68$. Тогда потенциал φ, отсчитываемый от потенциала нижнего провода, может быть найден как

$$\varphi_0 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \frac{R_x}{r + R_2} = \mathcal{E}_3 \frac{\frac{n_0}{n_{\max}} R_2}{r + R_2} = \frac{n_0}{n_{\max}} \mathcal{E}_3 \frac{R_2}{r + R_2} \qquad (1)$$

Подключим источник $G1$. Подберем значение сопротивления R_x таким образом, чтобы ток через микроамперметр отсутствовал. При этом показания потенциометра $n_1 = 2.47$.

$$\varphi_1 = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 \frac{R_{x1}}{r + R_2} = \mathcal{E}_3 \frac{\frac{n_1}{n_{max}} R_2}{r + R_2} = \frac{n_1}{n_{max}} \mathcal{E}_3 \frac{R_2}{r + R_2} \tag{2}$$

Деля (2) на (1), получим

$$\mathcal{E}_1 = \frac{n_1}{n_0} \mathcal{E}_2 \tag{3}$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{n_1}{n_0} \mathcal{E}_2 = 1.86 \text{ В}$$

3. Из (1):

$$\mathcal{E}_3 = \frac{n_{max}}{n_0} \frac{r + R_2}{R_2} \mathcal{E}_2$$

Прокручивая потенциометр до максимума, получим $n_{max} = 10$

$$\mathcal{E}_3 = 7.59 \text{ В}.$$

4. Подключив источник $G1$ без $R1$ и с $R1$, установим какое-то ненулевое значение тока, например, $I = 100$ мкА. При этом показания потенциометра $n_2 = 1.21$ и $n_{21} = 0.68$. Запишем систему уравнений Кирхгофа сразу с учетом R_1

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 R_s - I_2 R_x = \varepsilon_1$$

$$I_2 R_x - I_3 \left(R_2 - R_x \right) = -\varepsilon_3$$

Найдем I_1, для этого из второго уравнения системы выразим I_2, из третьего I_3 и подставим в первое уравнение:

$$I_1 \left(R_1 + R_a \right) - \varepsilon_1 = I_2 R_x$$

$$I_1 R_s - \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = I_3 \left(R_2 - R_x \right)$$

$$I_1 + \frac{I_1 R_s - \varepsilon_1}{R_x} + \frac{I_1 \left(R_1 + R_a \right) - \varepsilon_1 + \varepsilon_3}{\left(R_2 - R_x \right)} = 0$$

$$I_1 + \frac{I_1 R_s}{R_x} - \frac{\varepsilon_1}{R_x} + \frac{I_1 R_s}{\left(R_2 - R_x \right)} + \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\left(R_2 - R_x \right)} = 0$$

$$R_s = \frac{\frac{\varepsilon_1}{I_1 R_x} - \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{I_1 \left(R_2 - R_x \right)} - 1}{\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{\left(R_2 - R_x \right)} \right)}$$

$$R_s = \frac{\dfrac{\varepsilon_1\left(R_2 - R_x\right)}{I_1} - \dfrac{\left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right)R_x}{I_1} - R_x\left(R_2 - R_x\right)}{R_2}$$

$$R_s = \frac{\varepsilon_1\left(R_2 - R_x\right)}{I_1 R_2} - \frac{\left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right)R_x}{I_1 R_2} - \frac{R_x\left(R_2 - R_x\right)}{R_2}$$

$$R_s = \frac{\varepsilon_1}{I_1} - \frac{\varepsilon_3}{I_1}\frac{n_2}{n_{\max}} - \frac{n_2}{n_{\max}} R_2\left(1 - \frac{n_2}{n_{\max}}\right)$$

Учитывая, что n_2 соответствует $R_1 = 0,\ R_s = R_a$, получим

$$R_a = \frac{\varepsilon_1}{I_1} - \frac{\varepsilon_3}{I_1}\frac{n_2}{n_{\max}} - \frac{n_2}{n_{\max}} R_2\left(1 - \frac{n_2}{n_{\max}}\right),$$

$$R_a = 6377 \text{ Ом}$$

3. Нахождение R_1

$$R_1 = \frac{\varepsilon_1}{I_1} - \frac{\varepsilon_3}{I_1}\frac{n_{21}}{n_{\max}} - \frac{n_{21}}{n_{\max}} R_2\left(1 - \frac{n_{21}}{n_{\max}}\right) - R_a$$

$$R_1 = 5300 \text{ Ом}$$

Альтернативный способ нахождения R_a и R_1.

Выведем потенциометр R_1 в ноль, тем самым отделяя источник $G3$ от остальной цепи.

$$R_a = \frac{\mathcal{E}_2}{I_{21}},\ R_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{I_{11}} - R_a .$$

Критерии оценивания:

1.	Определено $\mathcal{E}_1 = 1.86 \pm 0.02$ В ($\mathcal{E}_1 = 1.86 \pm 0.1$ В – 1 балл)	2 балла
2.	Оценена погрешность	1 балл
3.	Определено $\mathcal{E}_3 = 7.59 \pm 0.02$ В ($\mathcal{E}_3 = 7.59 \pm 0.5$ В – 1 балл)	3 балла
4.	Оценена погрешность	1 балл
5.	Определено $R_a = 6.38 \pm 0.05$ кОм ($R_a = 6.38 \pm 0.5$ кОм – 1 балл)	3 балла
6.	Оценена погрешность	1 балл
7.	Определено $R_1 = 5.300 \pm 0.10$ кОм ($R_1 = 5.300 \pm 0.5$ кОм – 2 балла, $R_1 = 5.300 \pm 0.8$ кОм – 1 балл)	3 балла
8.	Оценена погрешность	1 балл