Районный тур 2020/21. 10 класс. I вариант

Задача 1.

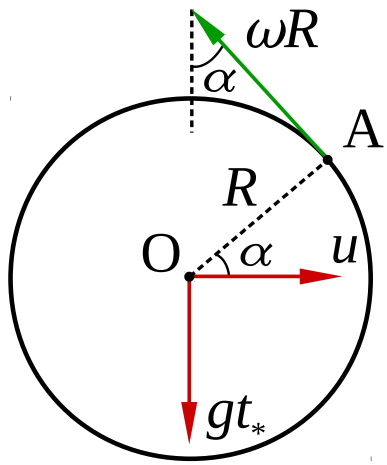

Рис. 1

Движение каждой точки обруча является суперпозицией поступательного движения со скоростью v и вращения с угловой скоростью ω (при этом v — скорость центра обруча, которая зависит от времени). Отсюда следует, что скорость некоторой точки обруча становится нулевой при условии $v = \omega R$. Положение соответствующей точки обруча зависит от направления скорости его центра. Заметим также, что в начальный момент времени $v = u > \omega R$.

Таким образом, искомый момент времени t_* легко определяется, если найдена зависимость скорости центра обруча от времени. Горизонтальная и вертикальная проекции этой скорости равны соответственно u и gt_*. Имеем следующее условие:

$$u^2 + (gt_*)^2 = (\omega R)^2 \,, \tag{1}$$

что приводит к

$$t_* = \frac{\sqrt{\omega^2 R^2 - u^2}}{g} \,. \tag{2}$$

Поскольку мы рассматриваем движение обруча до удара о землю, нужно потребовать, чтобы время t_* было меньше времени всего полета обруча $t_0 = \sqrt{2H/g}$:

$$t_* < t_0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 R^2 - u^2 < 2gH \,. \tag{3}$$

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим обруч в момент времени t_* (рис. 1). Красными стрелками обозначены компоненты скорости центра обруча O, а зеленая стрелка отвечает скорости, связанной с вращением. Высота точки A, скорость которой обратилась в нуль, определяется выражением:

$$h = H + R - \frac{gt_*^2}{2} + R\sin\alpha \,. \tag{4}$$

Используя условие $\omega R \sin\alpha = u$ и выражение (2), получаем

$$h = H + R - \frac{\omega^2 R^2 - u^2}{2g} + \frac{u}{\omega} \,. \tag{5}$$

Ответ: если $\omega^2 R^2 - u^2 < 2gH$, то скорость точки обруча обращается в нуль в момент времени $t_* = \sqrt{\omega^2 R^2 - u^2}/g$ на высоте $h = H + R - (\omega^2 R^2 - u^2)/(2g) + u/\omega$.

Задача 2.

Обозначим указанные на рисунке высоты за h_1, h_2, h_3 и h_4 (в нашем случае $h_1 = 3h$, $h_2 = 4h$, $h_3 = h_4 = 2h$). При определении минимального значения v_0 нужно потребовать, чтобы нижняя бусинка массы m “перевалилась” через горку h_2, а бусинка массы $2m$ — через горку h_4. Сформулируем последовательно данные два условия в виде соответствующих неравенств.

В первую очередь заметим, что при столкновении бусинок массами m, первая бусинка (начальная скорость которой v_0) останавливается и передает всю свою энергию второй бусинке, которая изначально покоилась. Данный факт полностью отвечает законам сохранения энергии и импульса. Таким образом, искомое условие будет таким же, как если бы нижней бусинки массы m не было вовсе. Из закона сохранения энергии следует требование

$$\frac{mv_0^2}{2} > mgh_2\,, \tag{6}$$

что эквивалентно $v_0^2 > 2gh_2$. Заметим, что величина h_1 никак не влияет на ответ к задаче.

Рассмотрим дальнейшее движение бусинки. Если выполнено условие (6), то бусинка скатится вниз и столкнется с бусинкой массы $2m$ со скоростью v_1, которую также легко найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh_3 = \frac{mv_1^2}{2}\,. \tag{7}$$

Пусть в результате столкновения бусинка массы m отскочит влево со скоростью v_2, а бусинка массы $2m$ начнет движение вправо со скоростью u. Чтобы выразить эти скорости через v_1 воспользуемся законами сохранения импульса и энергии:

$$mv_1 = 2mu - mv_2\,, \tag{8}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2mu^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\,. \tag{9}$$

Решая совместно эти два уравнения, приходим к следующему результату:

$$u = \frac{2}{3}v_1, \quad v_2 = \frac{1}{3}v_1. \tag{10}$$

Теперь необходимо, чтобы бусинка массы $2m$ смогла достичь вершины h_4. Данное условие запишется в виде:

$$\frac{2mu^2}{2} > 2mg(h_3 + h_4)\,. \tag{11}$$

Используя теперь выражение (10) для u и выражение (7) для v_1, переписываем требование (11) в следующей форме:

$$v_0^2 > \frac{1}{2}g(5h_3 + 9h_4)\,. \tag{12}$$

Осталось найти пересечение первого условия $v_0^2 > 2gh_2$ и неравенства (12). Подставляя значения высот, получаем соответственно $v_0^2 > 8gh$ и $v_0^2 > 14gh$. Таким образом, бусинка массы $2m$ выйдет на горизонтальный участок при $v_0 > \sqrt{14gh}$. В случае $v_0 = \sqrt{14gh}$ бусинка будет бесконечно долго “переваливаться” через последнюю горку.

Ответ: бусинка массы $2m$ выйдет на горизонтальный участок при $v_0 > \sqrt{14gh}$.

Задача 3.

Рассмотрим сначала ситуацию с одной проволокой (рис. 2 а). То, что проволока находится в равновесии в таком положении, означает, что суммарный момент сил, действующих на нее, равен нулю. Рассматривая моменты относительно точки A, получаем

$$\frac{x}{2}\frac{xM}{L} = \frac{L}{2}M + LM + \frac{L}{2}M\,, \tag{13}$$

где длина x введена, как показано на рисунке. Из (13) находим $x = 2L$. Таким образом, $|\mathrm{DE}| = 3L$, и масса всей проволоки равна $M_0 = 16M/3$. Заметим, что центр масс детали находится под точкой A.

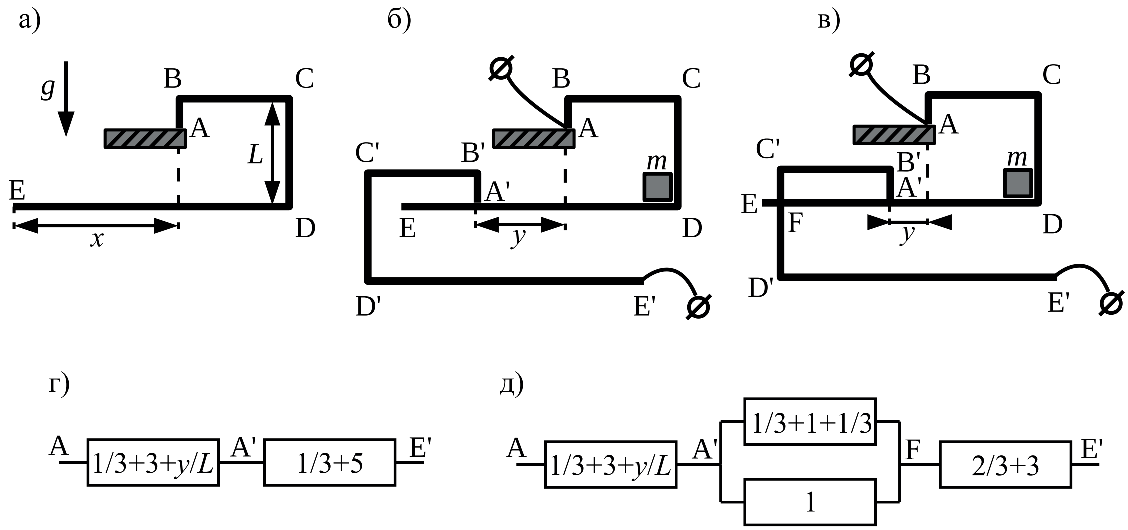

Рис. 2

Теперь перейдем ко второй ситуации (рис. 2 б, в). Возможны два варианта, см. обсуждение ниже. В обоих случаях для равновесия необходимо, чтобы добавленная деталь и грузик друг друга уравновешивали. Опять рассматривая моменты относительно точки A, приходим к выводу, что

$$yM_0g = Lmg, \tag{14}$$

где длина y введена, как показано на рисунке. Отсюда $y = mL/M_0 = (3mL)/(16M)$. Таким образом, при

$$y > x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{M} > \frac{32}{3} \tag{15}$$

уравновесить конструкцию невозможно: грузик слишком тяжелый, и длины рычага x не хватит. Пусть это не так, но

$$x - y < L \quad \text{и} \quad y \leqslant x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16}{3} < \frac{m}{M} \leqslant \frac{32}{3}\,, \tag{16}$$

тогда проволоки не касаются друг друга (рис. 2 б). В таком случае система соответствует электрической схеме на рис. 2 г (сопротивления указаны в единицах R). Сопротивление получившейся последовательной цепочки равно

$$R_{\text{общ}} = \left(\frac{1}{3} + 3 + \frac{y}{L} + \frac{1}{3} + 5\right)R = \left(\frac{26}{3} + \frac{3m}{16M}\right)R. \tag{17}$$

Теперь предположим, что

$$x - y \geqslant L \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{M} \leqslant \frac{16}{3}\,, \tag{18}$$

тогда проволоки касаются в точке F (рис. 2 в), и возникает параллельное соединение сопротивлений, как показано на рис. 2 д. При этом сопротивление между точками A и E′ равно

$$R_{\text{общ}} = \left(\frac{1}{3} + 3 + \frac{y}{L} + \frac{5}{8} + \frac{2}{3} + 3\right) R = \left(\frac{61}{8} + \frac{3m}{16M}\right) R\,. \tag{19}$$

Ответ: при $m/M > 32/3$ нет решений; при $16/3 < m/M \leqslant 32/3$ сопротивление равно $R_{\text{общ}} = R[26/3 + 3(m/M)/16]$; при $m/M \leqslant 16/3$ сопротивление равно $R_{\text{общ}} = R[61/8 + 3(m/M)/16]$.

Задача 4.

Пусть m — масса гироскутера. На рис. 3 обозначены все силы, действующие на гироскутер. Индекс 1 относится к колесу, расположенному ниже по склону, индекс 2 — ко второму колесу: N — сила нормальной реакции опоры, F — проекция силы трения вдоль оси гироскутера, Q — проекция силы трения в направлении разгона (вдоль колеса). По условию, гироскутер не опрокидывается и едет поступательно по прямой. Это означает, что полный момент всех сил равен нулю. Выпишем данное условие для моментов относительно точек O_1, O_2 и O, которые обозначены на рис. 3:

$$N_2 L - mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha - H\sin\alpha\right) = 0\,, \tag{20}$$

$$N_1 L - mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha + H\sin\alpha\right) = 0\,, \tag{21}$$

$$Q_1\frac{L}{2} - Q_2\frac{L}{2} = 0\,. \tag{22}$$

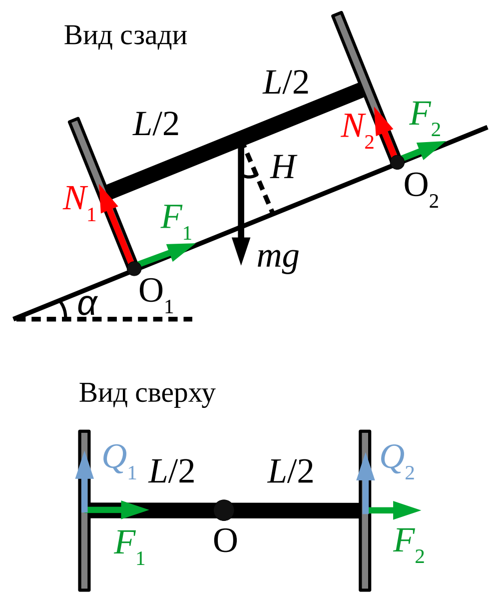

Рис. 3

Из уравнений (20) и (21) находим силы реакции опоры:

$$N_1 = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha + 2\frac{H}{L}\sin\alpha\right) = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha + \frac{2}{5}\sin\alpha\right), \tag{23}$$

$$N_2 = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - 2\frac{H}{L}\sin\alpha\right) = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \frac{2}{5}\sin\alpha\right). \tag{24}$$

Откуда сразу получаем условие, при котором гироскутер не переворачивается: $N_2 \geqslant 0$ или $\operatorname{tg}\alpha \leqslant L/(2H) = 5/2$. Обратим внимание, что $N_1 > N_2$. Из уравнения (22) следует, что силы Q_1 и Q_2, разгоняющие гироскутер, должны быть равны. Обозначим $Q_1 = Q_2 \equiv Q$. Рассмотрим также второй закон Ньютона в проекции на ось гироскутера (за положительное направление оси выбрано направление вверх по склону)

$$F_1 + F_2 - mg\sin\alpha = 0\,. \tag{25}$$

Полная сила трения, действующая на каждое из колес не может превышать μN_i, где N_i — сила реакции опоры, действующая на i-е колесо. Таким образом, мы получаем условия

$$\sqrt{F_1^2 + Q_1^2} \leqslant \mu N_1, \tag{26}$$

$$\sqrt{F_2^2 + Q_2^2} \leqslant \mu N_2. \tag{27}$$

Ускорение гироскутера равно

$$a = \frac{2Q}{m}\,, \tag{28}$$

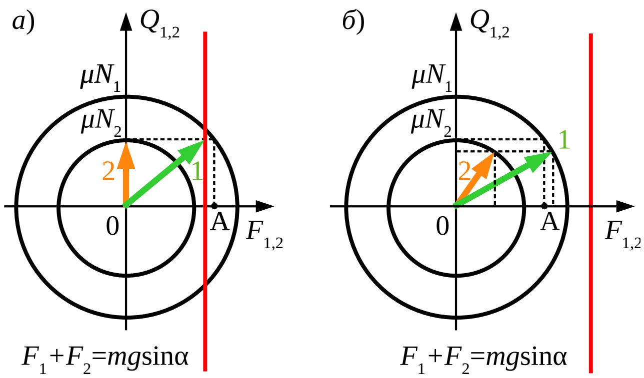

Рис. 4

поэтому вопрос о максимальном ускорении сводится к вопросу о нахождении максимального значения силы Q при наложенных условиях (25), (26) и (27).

Проще всего ответить на последний вопрос графически. На рисунке 4 по горизонтальной оси отложены силы F_1 и F_2, а по вертикальной — Q_1 и Q_2. Геометрическое место точек, задаваемых условиями (26) и (27), представляет собой круги радиусов μN_1 и μN_2, при этом $\mu N_1 > \mu N_2$. Проведем также вертикальную прямую, проходящую через точку $mg\sin\alpha$. Для ответа на вопрос задачи необходимо подобрать вектора 1 и 2 полных сил трения, действующих на колеса, таким образом, чтобы их сумма "дотягивалась" до красной линии, а их "вертикальные" компоненты совпадали. Возможны различные варианты в зависимости от значения "скатывающей силы" $mg\sin\alpha$. Если эта сила мала, то ее удается полностью "скомпенсировать" проекцией F_1 силы трения, действующей на нижнее колесо (см. рис. 4а). В этом случае $F_1 = mg\sin\alpha$, $F_2 = 0$, и максимальная ускоряющая сила равна $Q = \mu N_2$. При этом ускорение достигает значения

$$a = \frac{2\mu N_2}{m} = \mu g\cos\alpha\left(1 - 2\frac{H}{L}\operatorname{tg}\alpha\right) = \mu g\cos\alpha\left(1 - \frac{2}{5}\operatorname{tg}\alpha\right). \tag{29}$$

Сформулируем критерий малости для силы $mg\sin\alpha$, при котором реализуется данный режим. Из рис. 4а ясно, что для этого необходимо, чтобы вертикальная прямая была расположена левее точки A. Положение точки A можно найти из условия

$$\sqrt{(mg\sin\alpha_{\text{A}})^2 + (\mu N_2)^2} = \mu N_1. \tag{30}$$

Откуда получаем, что если

$$\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha_{\text{A}} = 2\frac{H}{L}\mu^2 = \frac{2}{5}\mu^2\,, \tag{31}$$

то максимальное ускорение гироскутера определяется выражением (29). В этом режиме только у верхнего колеса сила трения достигает максимально возможного значения μN_2.

Пусть теперь условие (31) не выполняется. В этом случае для компенсации скатывающей силы $mg\sin\alpha$ приходится тратить часть силы трения, действующей на верхнее колесо (см. рис. 4б), при этом для обоих колес силы трения достигают максимума. Максимальное значение силы Q можно найти из условия

$$\sqrt{(\mu N_1)^2 - Q^2} + \sqrt{(\mu N_2)^2 - Q^2} = mg\sin\alpha\,. \tag{32}$$

Откуда получаем

$$(2Q)^2 = (mg)^2(\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\left[1 - \left(\frac{2\mu H}{L}\right)^2\right]. \tag{33}$$

Соответствующее максимальное ускорение равно

$$a = g\cos\alpha\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1 - \left(\frac{2\mu H}{L}\right)^2} = g\cos\alpha\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1 - \frac{4}{25}\mu^2}\,. \tag{34}$$

В данном режиме для обоих колес сила трения достигает максимально возможного значения.

Наконец, если скатывающая сила $mg\sin\alpha$ очень большая, то сил трения обоих колес будет не хватать для того, чтобы удерживать гироскутер на склоне, и он будет соскальзывать. Очевидно, что это происходит, если $\operatorname{tg}\alpha > \mu$.

Ответ: Если $\operatorname{tg}\alpha > \mu$ — гироскутер соскальзывает; при $\operatorname{tg}\alpha > 5/2$ гироскутер переворачивается. Если гироскутер может стоять на наклонной плоскости, то при $\operatorname{tg}\alpha > 2\mu^2/5$ ускорение может достигать $a = g\cos\alpha\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1-4\mu^2/25}$, а при $\operatorname{tg}\alpha < 2\mu^2/5$ максимальное ускорение равно $a = \mu g\cos\alpha(1-2\operatorname{tg}\alpha/5)$.

Задача 5.

При больших y лучи от источника не могут попасть на зеркало M, и существуют только 3 изображения в зеркальном уголке: S_1 — изображение в горизонтальном зеркале, S_2 — изображение в вертикальном зеркале и S_{12}, получающееся в результате последовательного отражения в одном и другом зеркале (пример хода луча показан на рис. 5а).

При достаточно маленьких y зеркало M начнет “работать”. Рассмотрим пограничную ситуацию, когда четвертое изображение S_0 только-только появляется (рис. 5б): этому соответствует прохождение луча по самому краю зеркала. Из подобия треугольников EFA и ADS получаем $y = L/2$ — начиная с такого y, существует четвертое изображение.

Далее, при уменьшении y, появляется еще один способ отразиться от зеркала M, как показано на рис. 5в. Опять рассмотрим пограничную ситуацию. Из того, что угол падения равен углу отражения, следует подобие треугольников ABG и SHG, откуда находим соотношение $|BG| : |GH| = 2 : 1$. Следовательно, $|BG| = 2a/3$, и из подобия треугольников EFA и ABG имеем $y = L/6$. Начиная с такого y, существует пятое изображение S_{20}.

Пять изображений существует, пока зеркало M не сравняется с зеркалом AB (это происходит в точке $y = 0$). В этот момент изображения S_1 и S_0, S_{12} и S_{20} совпадут, и мы увидим только 3 изображения, как было в самом первом случае. Действительно, при $y = 0$, система представляет собой зеркальный уголок, только другого размера.

Далее, при $y < 0$ изображения S_1 и S_0, S_{12} и S_{20} снова разделятся, и будут существовать 5 изображений. Это продлится до тех пор, пока зеркало M не сравняется с источником света S. При $y < -a$ изображения S_0 и S_{20} исчезнут, и останутся три изображения S_1, S_2 и S_{12}.

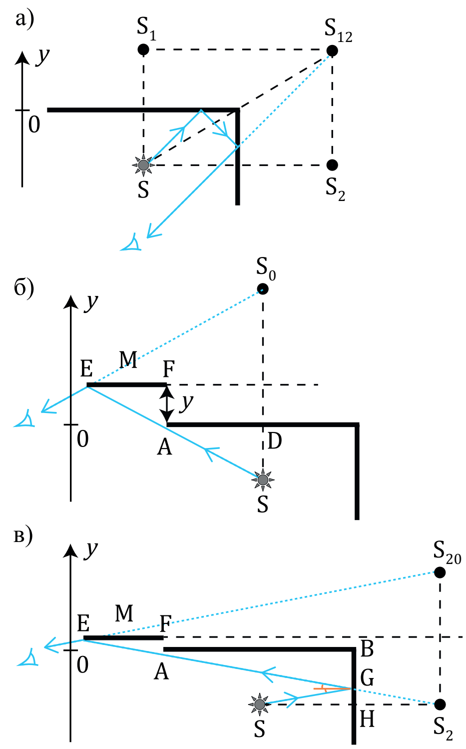

Рис. 5

Количества изображений отмечены на рис. 6. Заметим, что при бесконечно большом размере зеркала M 5 изображений существуют при всех $y > -a$ кроме нуля. Этот вариант учтен в нашем ответе, ведь при $L = \infty$ неравенство $y \leqslant L/6$ выполнено для любых y.

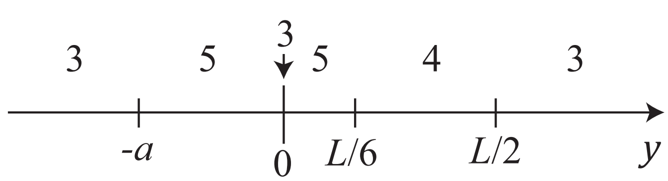

Рис. 6

Ответ: $y > L/2 \leftrightarrow$ 3 изображения; $L/6 < y \leqslant L/2 \leftrightarrow 4$; $0 < y \leqslant L/6 \leftrightarrow 5$; $y = 0 \leftrightarrow 3$; $-a \leqslant y < 0 \leftrightarrow 5$; $y \leqslant -a \leftrightarrow 3$.

Районный тур 2020/21. 10 класс. II вариант

Задача 1.

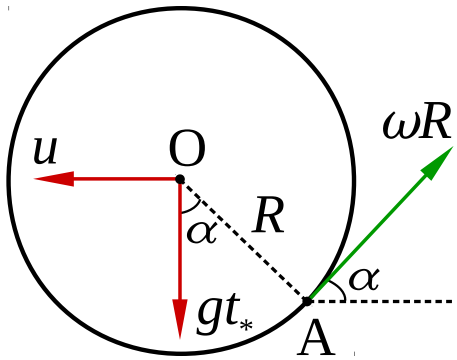

Рис. 7

Движение каждой точки обруча является суперпозицией поступательного движения со скоростью v и вращения с угловой скоростью ω (при этом v — скорость центра обруча, которая зависит от времени). Отсюда следует, что скорость некоторой точки обруча становится нулевой при условии $v = \omega R$. Положение соответствующей точки обруча зависит от направления скорости его центра. Заметим также, что в начальный момент времени $v = u > \omega R$.

Таким образом, искомый момент времени t_* легко определяется, если найдена зависимость скорости центра обруча от времени. Горизонтальная и вертикальная проекции этой скорости равны соответственно u и gt_*. Имеем следующее условие:

$$u^2 + (gt_*)^2 = (\omega R)^2\,, \tag{35}$$

что приводит к

$$t_* = \frac{\sqrt{\omega^2 R^2 - u^2}}{g}\,. \tag{36}$$

Поскольку мы рассматриваем движение обруча до удара о землю, нужно потребовать, чтобы время t_* было меньше времени всего полета обруча $t_0 = \sqrt{2H/g}$:

$$t_* < t_0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 R^2 - u^2 < 2gH\,. \tag{37}$$

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим обруч в момент времени t_* (рис. 7). Красными стрелками обозначены компоненты скорости центра обруча O, а зеленая стрелка отвечает скорости, связанной с вращением. Высота точки A, скорость которой обратилась в нуль, определяется выражением:

$$h = H + R - \frac{gt_*^2}{2} - R\cos\alpha\,. \tag{38}$$

Используя условие $\omega R \cos\alpha = u$ и выражение (36), получаем

$$h = H + R - \frac{\omega^2 R^2 - u^2}{2g} - \frac{u}{\omega}\,. \tag{39}$$

Ответ: если $\omega^2 R^2 - u^2 < 2gH$, то скорость точки обруча обращается в нуль в момент времени $t_* = \sqrt{\omega^2 R^2 - u^2}/g$ на высоте $h = H + R - (\omega^2 R^2 - u^2)/(2g) - u/\omega$.

Задача 2.

Обозначим указанные на рисунке высоты за h_1, h_2, h_3 и h_4 (в нашем случае $h_1 = 4h$, $h_2 = h_4 = 2h$, $h_3 = h$). При определении минимального значения v_0 нужно потребовать, чтобы нижняя бусинка массы m "перевалилась" через горку h_2, а бусинка массы $3m$ — через горку h_4. Сформулируем последовательно данные два условия в виде соответствующих неравенств.

В первую очередь заметим, что при столкновении бусинок массами m, первая бусинка (начальная скорость которой v_0) останавливается и передает всю свою энергию второй бусинке, которая изначально покоилась. Данный факт полностью отвечает законам сохранения энергии и импульса. Таким образом, искомое условие будет таким же, как если бы нижней бусинки массы m не было вовсе. Из закона сохранения энергии следует требование

$$\frac{mv_0^2}{2} > mgh_2\,, \tag{40}$$

что эквивалентно $v_0^2 > 2gh_2$. Заметим, что величина h_1 никак не влияет на ответ к задаче.

Рассмотрим дальнейшее движение бусинки. Если выполнено условие (40), то бусинка скатится вниз и столкнется с бусинкой массы $3m$ со скоростью v_1, которую также легко найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh_3 = \frac{mv_1^2}{2}\,. \tag{41}$$

Пусть в результате столкновения бусинка массы m отскочит влево со скоростью v_2, а бусинка массы $3m$ начнет движение вправо со скоростью u. Чтобы выразить эти скорости через v_1 воспользуемся законами сохранения импульса и энергии:

$$mv_1 = 3mu - mv_2\,, \tag{42}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{3mu^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\,. \tag{43}$$

Решая совместно эти два уравнения, приходим к следующему результату:

$$u = \frac{1}{2}v_1, \quad v_2 = \frac{1}{2}v_1. \tag{44}$$

Теперь необходимо, чтобы бусинка массы $3m$ смогла достичь вершины h_4. Данное условие запишется в виде:

$$\frac{3mu^2}{2} > 3mg(h_3 + h_4)\,. \tag{45}$$

Используя теперь выражение (44) для u и выражение (41) для v_1, переписываем требование (45) в следующей форме:

$$v_0^2 > 2g(3h_3 + 4h_4)\,. \tag{46}$$

Осталось найти пересечение первого условия $v_0^2 > 2gh_2$ и неравенства (46). Подставляя значения высот, получаем соответственно $v_0^2 > 4gh$ и $v_0^2 > 22gh$. Таким образом, бусинка массы $3m$ выйдет на горизонтальный участок при $v_0 > \sqrt{22gh}$. В случае $v_0 = \sqrt{22gh}$ бусинка будет бесконечно долго "переваливаться" через последнюю горку.

Ответ: бусинка массы $3m$ выйдет на горизонтальный участок при $v_0 > \sqrt{22gh}$.

Задача 3.

Рассмотрим сначала ситуацию с одной проволокой (рис. 8 а). То, что проволока находится в равновесии в таком положении, означает, что суммарный момент сил, действующих на нее, равен нулю. Рассматривая моменты относительно точки A, получаем

$$\frac{x}{2}\frac{xM}{L} = \frac{L}{2}M + LM + \frac{L}{2}M\,, \tag{47}$$

где длина x введена, как показано на рисунке. Из (47) находим $x = 2L$. Таким образом, $|\mathrm{DE}| = 3L$, и масса всей проволоки равна $M_0 = 26M/5$. Заметим, что центр масс детали находится под точкой A.

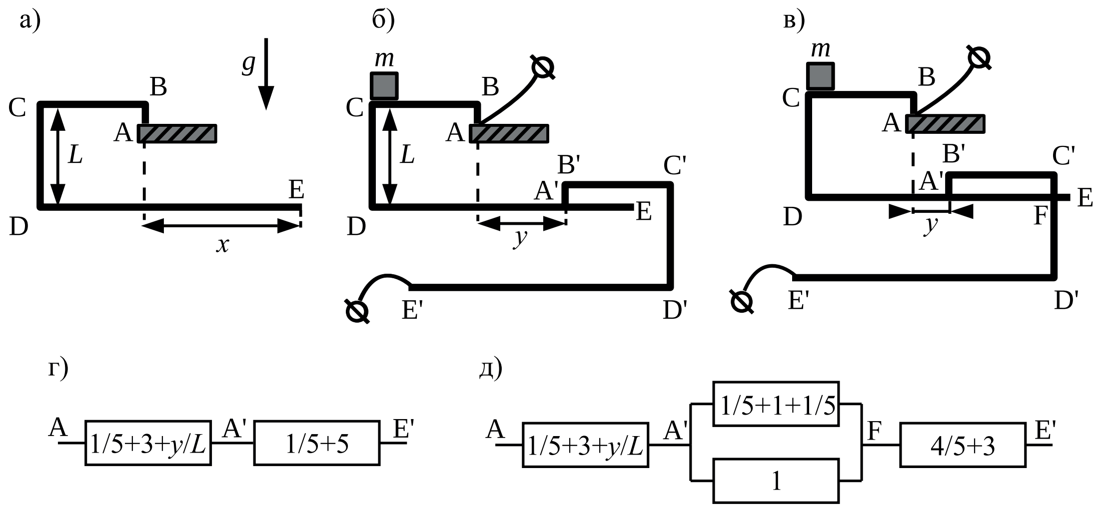

Рис. 8

Теперь перейдем ко второй ситуации (рис. 8 б, в). Возможны два варианта, см. обсуждение ниже. В обоих случаях для равновесия необходимо, чтобы добавленная деталь и грузик друг друга уравновешивали. Опять рассматривая моменты относительно точки A, приходим к выводу, что

$$yM_0 g = Lmg, \tag{48}$$

где длина y введена, как показано на рисунке. Отсюда $y = mL/M_0 = (5mL)/(26M)$. Таким образом, при

$$y > x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{M} > \frac{52}{5} \tag{49}$$

уравновесить конструкцию невозможно: грузик слишком тяжелый, и длины рычага x не хватит. Пусть это не так, но

$$x - y < L \quad \text{и} \quad y \leqslant x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{26}{5} < \frac{m}{M} \leqslant \frac{52}{5}\,, \tag{50}$$

тогда проволоки не касаются друг друга (рис. 8 б). В таком случае система соответствует электрической схеме на рис. 8 г (сопротивления указаны в единицах R). Сопротивление получившейся последовательной цепочки равно

$$R_{\text{общ}} = \left(\frac{1}{5} + 3 + \frac{y}{L} + \frac{1}{5} + 5\right)R = \left(\frac{42}{5} + \frac{5m}{26M}\right)R. \tag{51}$$

Теперь предположим, что

$$x - y \geqslant L \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{M} \leqslant \frac{26}{5}\,, \tag{52}$$

тогда проволоки касаются в точке F (рис. 8 в), и возникает параллельное соединение сопротивлений, как показано на рис. 8 д. При этом сопротивление между точками A и E′ равно

$$R_{\text{общ}} = \left(\frac{1}{5} + 3 + \frac{y}{L} + \frac{7}{12} + \frac{4}{5} + 3\right) R = \left(\frac{91}{12} + \frac{5m}{26M}\right) R\,. \tag{53}$$

<u>Ответ</u>: при $m/M > 52/5$ нет решений; при $26/5 < m/M \leqslant 52/5$ сопротивление равно $R_{\text{общ}} = R[42/5 + 5(m/M)/26]$; при $m/M \leqslant 26/5$ сопротивление равно $R_{\text{общ}} = R[91/12 + 5(m/M)/26]$.

Задача 4.

Пусть m — масса гироскутера. На рис. 9 обозначены все силы, действующие на гироскутер. Индекс 1 относится к колесу, расположенному ниже по склону, индекс 2 — ко второму колесу: N — сила нормальной реакции опоры, F — проекция силы трения вдоль оси гироскутера, Q — проекция силы трения в направлении разгона (вдоль колеса). По условию, гироскутер не опрокидывается и едет поступательно по прямой. Это означает, что полный момент всех сил равен нулю. Выпишем данное условие для моментов относительно точек O_1, O_2 и O, которые обозначены на рис. 9:

$$N_2 L - mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha - H\sin\alpha\right) = 0\,, \tag{54}$$

$$N_1 L - mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha + H\sin\alpha\right) = 0\,, \tag{55}$$

$$Q_1\frac{L}{2} - Q_2\frac{L}{2} = 0\,. \tag{56}$$

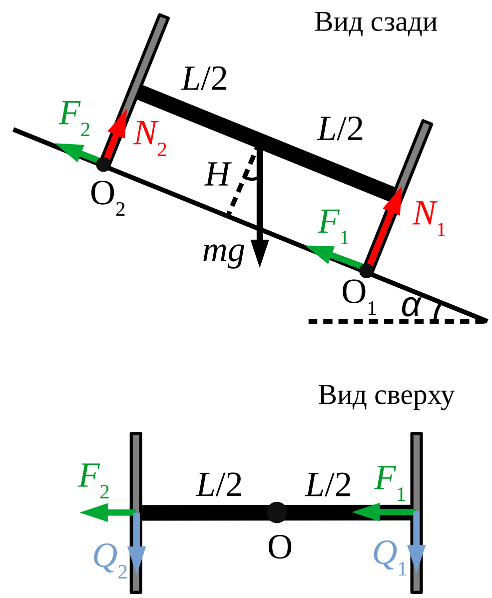

Рис. 9

Из уравнений (54) и (55) находим силы реакции опоры:

$$N_1 = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha + 2\frac{H}{L}\sin\alpha\right) = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha + \frac{2}{3}\sin\alpha\right)\,, \tag{57}$$

$$N_2 = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - 2\frac{H}{L}\sin\alpha\right) = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\sin\alpha\right)\,. \tag{58}$$

Откуда сразу получаем условие, при котором гироскутер не переворачивается: $N_2 \geqslant 0$ или $\operatorname{tg}\alpha \leqslant L/(2H) = 3/2$. Обратим внимание, что $N_1 > N_2$. Из уравнения (56) следует, что силы Q_1 и Q_2, разгоняющие гироскутер, должны быть равны. Обозначим $Q_1 = Q_2 \equiv Q$. Рассмотрим также второй закон Ньютона в проекции на ось гироскутера (за положительное направление оси выбрано направление вверх по склону)

$$F_1 + F_2 - mg\sin\alpha = 0\,. \tag{59}$$

Полная сила трения, действующая на каждое из колес не может превышать μN_i, где N_i — сила реакции опоры, действующая на i-е колесо. Таким образом, мы получаем условия

$$\sqrt{F_1^2 + Q_1^2} \leqslant \mu N_1, \tag{60}$$

$$\sqrt{F_2^2 + Q_2^2} \leqslant \mu N_2. \tag{61}$$

Ускорение гироскутера равно

$$a = \frac{2Q}{m}\,, \tag{62}$$

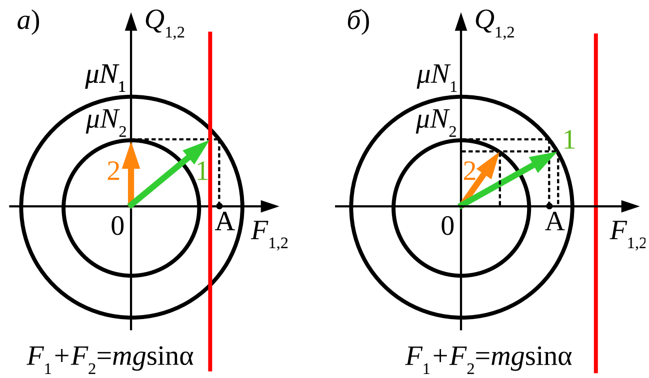

Рис. 10

поэтому вопрос о максимальном ускорении сводится к вопросу о нахождении максимального значения силы Q при наложенных условиях (59), (60), (61).

Проще всего ответить на последний вопрос графически. На рисунке 10 по горизонтальной оси отложены силы F_1 и F_2, а по вертикальной — Q_1 и Q_2. Геометрическое место точек, задаваемых условиями (60) и (61), представляет собой круги радиусов μN_1 и μN_2, при этом $\mu N_1 > \mu N_2$. Проведем также вертикальную прямую, проходящую через точку $mg\sin\alpha$. Для ответа на вопрос задачи необходимо подобрать вектора 1 и 2 полных сил трения, действующих на колеса, таким образом, чтобы их сумма "дотягивалась" до красной линии, а их "вертикальные" компоненты совпадали. Возможны различные варианты в зависимости от значения "скатывающей силы" $mg\sin\alpha$. Если эта сила мала, то ее удается полностью "скомпенсировать" проекцией F_1 силы трения, действующей на нижнее колесо (см. рис. 10а). В этом случае $F_1 = mg\sin\alpha$, $F_2 = 0$, и максимальная ускоряющая сила равна $Q = \mu N_2$. При этом ускорение достигает значения

$$a = \frac{2\mu N_2}{m} = \mu g\cos\alpha\left(1 - 2\frac{H}{L}\operatorname{tg}\alpha\right) = \mu g\cos\alpha\left(1 - \frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha\right). \tag{63}$$

Сформулируем критерий малости для силы $mg\sin\alpha$, при котором реализуется данный режим. Из рис. 10а ясно, что для этого необходимо, чтобы вертикальная прямая была расположена левее точки А. Положение точки А можно найти из условия

$$\sqrt{(mg\sin\alpha_{\mathrm{A}})^2 + (\mu N_2)^2} = \mu N_1\,. \tag{64}$$

Откуда получаем, что если

$$\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha_{\mathrm{A}} = 2\frac{H}{L}\mu^2 = \frac{2}{3}\mu^2, \tag{65}$$

то максимальное ускорение гироскутера определяется выражением (63). В этом режиме только у верхнего колеса сила трения достигает максимально возможного значения μN_2.

Пусть теперь условие (65) не выполняется. В этом случае для компенсации скатывающей силы $mg\sin\alpha$ приходится тратить часть силы трения, действующей на верхнее колесо (см. рис. 10б), при этом для обоих колес силы трения достигают максимума. Максимальное значение силы Q можно найти из условия

$$\sqrt{(\mu N_1)^2 - Q^2} + \sqrt{(\mu N_2)^2 - Q^2} = mg\sin\alpha\,. \tag{66}$$

Откуда получаем

$$(2Q)^2 = (mg)^2(\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\left[1 - \left(\frac{2\mu H}{L}\right)^2\right]. \tag{67}$$

Соответствующее максимальное ускорение равно

$$a = g\cos\alpha\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1 - \left(\frac{2\mu H}{L}\right)^2} = g\cos\alpha\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1 - \frac{4}{9}\mu^2}\,. \tag{68}$$

В данном режиме для обоих колес сила трения достигает максимально возможного значения.

Наконец, если скатывающая сила $mg\sin\alpha$ очень большая, то сил трения обоих колес будет не хватать для того, чтобы удерживать гироскутер на склоне, и он будет соскальзывать. Очевидно, что это происходит, если $\operatorname{tg}\alpha > \mu$.

Ответ: Если $\operatorname{tg}\alpha > \mu$ — гироскутер соскальзывает; при $\operatorname{tg}\alpha > 3/2$ гироскутер переворачивается. Если гироскутер может стоять на наклонной плоскости, то при $\operatorname{tg}\alpha > 2\mu^2/3$ ускорение может достигать $a = g\cos\alpha\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1-4\mu^2/9}$, а при $\operatorname{tg}\alpha < 2\mu^2/3$ максимальное ускорение равно $a = \mu g\cos\alpha(1 - 2\operatorname{tg}\alpha/3)$.

Задача 5.

При больших отрицательных x лучи от источника не могут попасть на зеркало M, и существуют только 3 изображения в зеркальном уголке: S_1 — изображение в вертикальном зеркале, S_2 — изображение в горизонтальном зеркале и S_{12}, получающееся в результате последовательного отражения в одном и другом зеркале (пример хода луча показан на рис. 11а).

При отрицательных и достаточно больших по модулю x зеркало M начнет "работать". Рассмотрим пограничную ситуацию, когда четвертое изображение S_0 только-только появляется (рис. 11б): этому соответствует прохождение луча по самому краю зеркала. Из подобия треугольников EFA и ADS получаем $x = -2L$ — начиная с такого x, существует четвертое изображение.

Далее, при увеличении x, появляется еще один способ отразиться от зеркала M, как показано на рис. 11в. Опять рассмотрим пограничную ситуацию. Из того, что угол падения равен углу отражения, следует подобие треугольников ABG и SHG, откуда находим соотношение $|BG| : |GH| = 2 : 1$. Следовательно, $|BG| = 4a/3$, и из подобия треугольников EFA и ABG имеем $x = -2L/3$. Начиная с такого x, существует пятое изображение S_{20}.

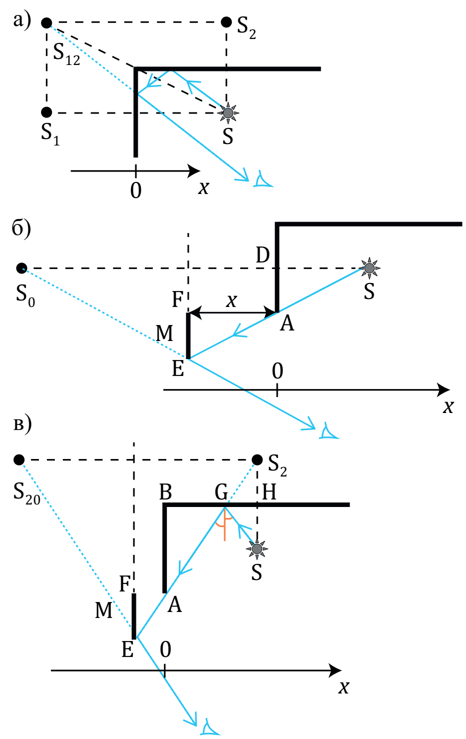

Рис. 11

Пять изображений существует, пока зеркало M не сравняется с зеркалом AB (это происходит в точке $x = 0$). В этот момент изображения S_1 и S_0, S_{12} и S_{20} совпадут, и мы увидим только 3 изображения, как было в самом первом случае. Действительно, при $x = 0$, система представляет собой зеркальный уголок, только другого размера.

Далее, при $x > 0$ изображения S_1 и S_0, S_{12} и S_{20} снова разделятся, и будет существовать 5 изображений. Это продлится до тех пор, пока зеркало M не сравняется с источником света S. При $x > 2a$ изображения S_0 и S_{20} исчезнут, и останутся три изображения S_1, S_2 и S_{12}.

Количества изображений отмечены на рис. 12. Заметим, что при бесконечно большом размере зеркала M 5 изображений существуют при всех $x < 2a$ кроме нуля. Этот вариант учтен в нашем ответе, ведь при $L = \infty$ неравенство $x \geqslant -2L/3$ выполнено для любых x.

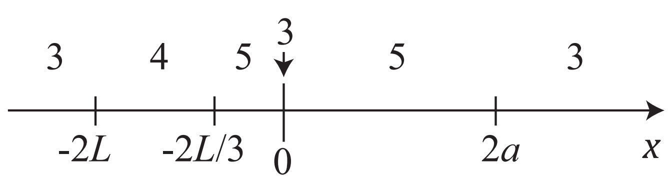

Рис. 12

Ответ: $x < -2L \leftrightarrow$ 3 изображения; $-2L \leqslant x < -2L/3 \leftrightarrow 4$; $-2L/3 \leqslant x < 0 \leftrightarrow 5$; $x = 0 \leftrightarrow 3$; $0 < x \leqslant 2a \leftrightarrow 5$; $x > 2a \leftrightarrow 3$.