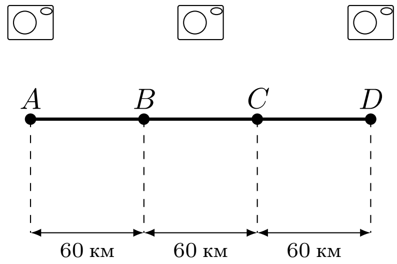
Возможные решения задач. 7 класс

Вариант 1

Задача 1. Камеры



Можно посчитать, за какое минимальное время может проехать автомобиль от первой до второй камеры, не нарушая правил дорожного движения. Для этого автомобиль должен двигаться с максимально разрешенной скоростью, то есть 60 км/ч на отрезке AB на протяжении 60 км и со скоростью 90 км/ч на половине отрезка на протяжении еще 30 км. Сумма времен на прохождение расстояния между первой и второй камерами будет равна T_1:

$$T_1 = \frac{60\ \text{км}}{60\ \text{км/ч}} + \frac{30\ \text{км}}{90\ \text{км/ч}} = 1\ \text{час}\ 20\ \text{минут}. \tag{1}$$

Так как автомобиль проехал этот отрезок за 1 час 10 минут, можно сказать, что он наверняка нарушил правила на отрезке между первой и второй камерой.

Теперь рассчитаем минимальное время движения между второй и третьей камерами. Автомобиль может оставшиеся 30 км до точки C проехать со скоростью 90 км/ч, а затем 60 км до точки D проехать со скоростью 120 км/ч. Тогда затраченное на это время будет равно T_2:

$$T_2 = \frac{30\ \text{км}}{90\ \text{км/ч}} + \frac{60\ \text{км}}{120\ \text{км/ч}} = 50\ \text{минут}. \tag{2}$$

Так как автомобиль проехал отрезок между второй и третьей камерой за 60 минут, нельзя сказать, что он наверняка превышал скорость на этом отрезке.

Ответ: Автомобиль наверняка превышал скорость на отрезке между первой и второй камерами.

Задача 2. Мыло

2.1. Первое возможное решение

Изначально в бутылке было только мыло. Тогда каждый посетитель, выдавливая объем V, тратил ровно такой же объем мыла. После первого разбавления в бутылке оказалась смесь мыла и воды, в которой однут треть занимает мыло и две трети — вода. Тогда каждый посетитель, выдавливая тот же объем V, тратил бы лишь $V/3$ мыла. Однако, каждый посетитель после разбавления стал выдавливать объем $3V$ жидкости, и поэтому тратить тот же самый объем мыла V, что и до разбавления. Поэтому расход мыла не изменился после первого разбавления.

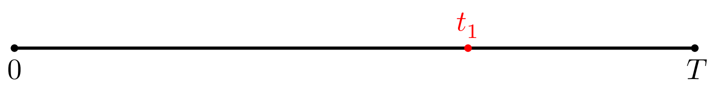
Сразу после второго разбавления в бутылке находится только $1/9$ часть мыла и $8/9$ частей воды. Тогда выдавливаемое количество мылы составляет $1/9$ часть от объема выдавленной жидкости. Однако теперь посетители выдавливают еще в три раза больше жидкости, то есть в 9 раз больше, чем изначально. Это значит, что они снова каждый раз выдавливают такое же количество мыла. Значит расход мыла не меняется и после второго разбавления.

Можно понять, что расход мыла не изменяется при любом количестве разбавлений. А тогда мыло в банке кончится за то же время, что и в случае, когда его не разбавляли водой, то есть за неделю.

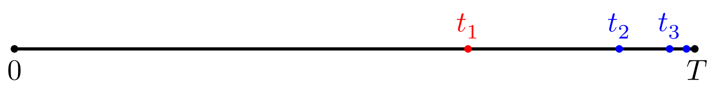
Ответ: через 7 дней.

2.2. Второе возможное решение

Введем числовую ось и обозначим на ней начальный момент, и момент T, когда мыло кончилось в первой бутылке. Найдем на ней время t_1, в которое произошло первое разбавление. Это произошло, когда израсходовалось $2/3$ бутылки, то есть прошло $2T/3$.



Теперь в момент t_1 у нас снова имеется полная бутылка жидкости, но расход жидкости увеличился втрое. Тогда до следующего разбавления пройдет втрое меньший промежуток времени. Но можно заметить, что оставшееся время до момента T тоже втрое меньше изначального. Тогда можно сказать, что до следующего разбавления пройдет $2/3$ оставшегося времени. По этому правилу можно найти момент t_2 второго разбавления и моменты t_n всех последующих.

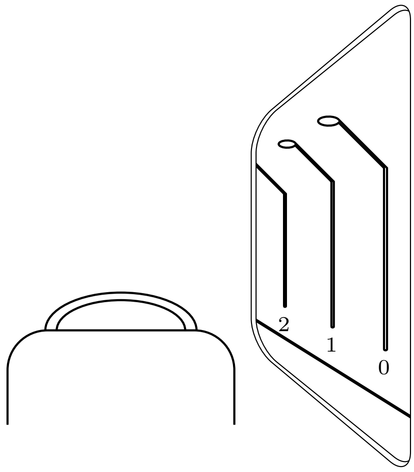


Тогда можно заметить, что каждое разбавление будет происходить все ближе к моменту T, но не позже. Кроме того, с каждым разбавлением мыла в бутылке становится все меньше, а значит в момент T его не останется вовсе.

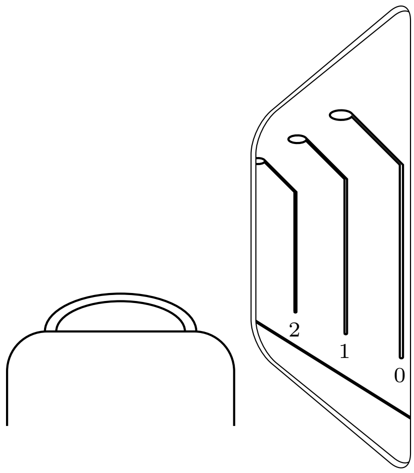
Ответ: через 7 дней.

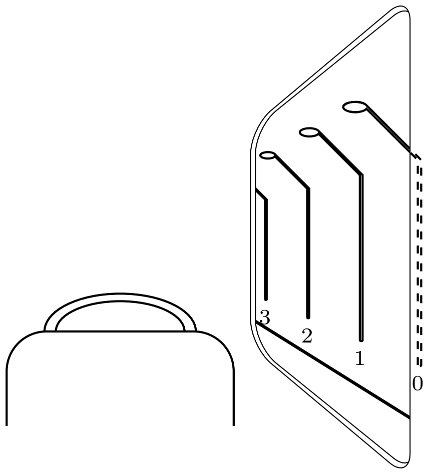
Задача 3. Дорожная

Мальчик наблюдает за движущимися относительно него фонарями и деревьями, имея ограниченный угол зрения. На рисунке представлено, что он видит из окна на примере фонарей. При движении каждый фонарь перемещается от левого края угла зрения к правому. Разумно считать фонарь тогда, когда его столб пересекает правый край. В таком случае один и тот же фонарь не будет учтен несколько раз.



Мальчик всегда видит ровно три фонаря. Тогда в тот момент, когда один из фонарей (фонарь 0) исчезает из поля зрения, в нем должен появляться следующий (фонарь 3). Иначе существовал бы такой промежуток времени, в котором в угле зрения находилось бы всего два фонаря, а это противоречит условию.





Фонарь 3 ровно через секунду пересечет край щели и займет положение фонаря 0. Кроме него за это время край щели пересекут еще фонари (1 и 2). Тогда мальчик насчитает 3 фонаря, кроме фонаря 0, который уже посчитан ранее. Значит можно сказать, что мальчик насчитывает 3 фонаря в секунду.

Аналогично будет выглядеть картина подсчета деревьев, только описанный процесс будет происходить не за 1 секунду, а за 3, и вместо 3 фонарей мальчик будет видеть 4 дерева в поле зрения. Тогда можно найти, что мальчик насчитывает 4 дерева в 3 секунды. А значит, насчитав 180 фонарей, он потратил 60 секунд и насчитал 80 деревьев.

<u>**Ответ:**</u> 80 деревьев.

Задача 4. Пулемет и поезд

Из того, что расстояние между всеми дырками одинаковое, можно сделать вывод о том, что за промежуток времени между выстрелами точка попадания сдвигается на постоянную величину x. То есть, при стрельбе по неподвижному поезду расстояние между любыми соседними дырками было бы равно x.

В случае, когда поезд движется налево, расстояние между дырками складывается из x и расстояния y, которое проходит поезд

$$x + y = 100 \text{ см}. \tag{3}$$

Если же поезд движется направо, то возможны два варианта. Поезд может проходить расстояние $y > x$, либо $y < x$. В обоих случаях расстояние между дырками будет равно 30 см, и будет равно разности x и y.

В первом сучае

$$x - y = 30 \text{ см}, \tag{4}$$

во втором

$$y - x = 30 \text{ см}. \tag{5}$$

В обоих случаях можно найти интересующий нас y. В первом случае $y = 35$ см, во втором — 65 см. Такое перемещение совершает поезд за время между выстрелами t, которое равно $1/5$ секунды. Тогда скорость поезда равна

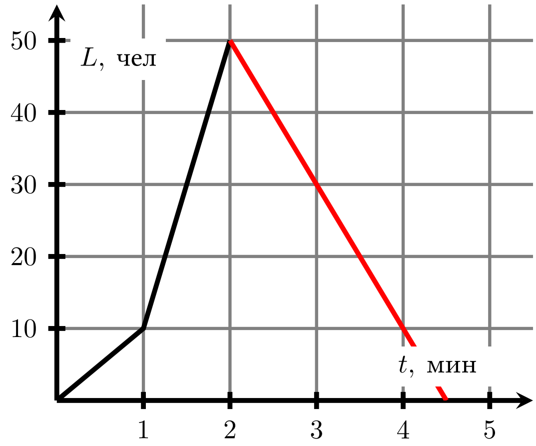
$$v = \frac{y}{t}, \tag{6}$$

и составляет 1,75 м/с для первого случая и 3,25 м/с для второго.

Ответ: 1,75 м/с и 3,25 м/с.

Задача 5. Эскалатор

Эскалатор можно рассмотреть как два параллельных пути, по которым люди спускаются либо стоя, либо идя пешком. Понятно, что спускаться пешком быстрее. Пусть стоя спускается N человек в минуту, а пешком — M человек в минуту. Тогда максимум может спускаться $2M$, минимум $2N$, а в стационарном режиме спускается $N+M$ человек в минуту.



Скорость роста очереди на каждом участкке можно определить по графику, поделив изменение ее длины на время, за которое оно произошло. Так, скорость роста очереди на первом участке равна 10 человек в минуту, на втором — 40 человек в минуту.

Эту скорость можно связать с количеством спускающихся людей и числом входящих на станцию. Если за минуту на станцию входит K человек, а спускается изначально $N+M$, то скорость роста очереди на первом участке будет равна $K-(N+M)$.

На втором участке люди стоят на обеих сторонах, а значит всего спускается $2N$ человек в минуту. Скорость роста очереди на втором участке равна $K-2N$ и на 30 человек в минуту больше, чем на первом. Значит $M-N=30$ человек в минуту.

После двух минут люди стали идти пешком по двум сторонам, и всего спускется $2M$ человек в минуту. Скорость роста очереди на этом участке равна $K-2M$. Это на 30 человек в минуту меньше, чем на первом участке, а значит равна -20 человек в минуту.

По графику заметим, что через 2 минуты у эскалатора образовалась очередь из 50 человек. Тогда со скоростью 20 человек в минуту эта очередь сократится до нуля за

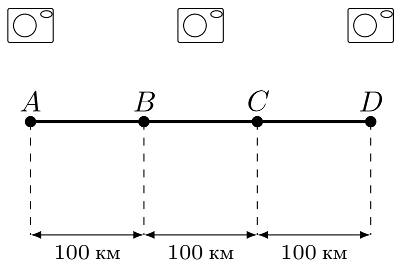
$$t=\frac{50\text{ чел}}{20\text{ чел/мин}}=2{,}5\text{ мин.} \tag{7}$$

__Ответ:__ за 2,5 минуты.

Возможные решения задач. 7 класс

Вариант 2

Задача 1. Камеры



Можно посчитать, за какое минимальное время может проехать автомобиль от первой до второй камеры, не нарушая правил дорожного движения. Для этого автомобиль должен двигаться с максимально разрешенной скоростью, то есть 50 км/ч на отрезке AB на протяжении 100 км и со скоростью 75 км/ч на половине отрезка на протяжении еще 50 км. Сумма времен на прохождение расстояния между первой и второй камерами будет равна T_1:

$$T_1 = \frac{100\text{ км}}{50\text{ км/ч}} + \frac{50\text{ км}}{75\text{ км/ч}} = 2\text{ часа }40\text{ минут.} \tag{8}$$

Так как автомобиль проехал этот отрезок за 3 часа, нельзя сказать, что он наверняка нарушил правила на отрезке между первой и второй камерой.

Теперь рассчитаем минимальное время движения между второй и третьей камерами. Автомобиль может оставшиеся 50 км до точки C проехать со скоростью 75 км/ч, а затем 100 км до точки D проехать со скоростью 100 км/ч. Тогда затраченное на это время будет равно T_2:

$$T_2 = \frac{50\text{ км}}{75\text{ км/ч}} + \frac{100\text{ км}}{100\text{ км/ч}} = 1\text{ час }40\text{ минут.} \tag{9}$$

Так как автомобиль проехал отрезок между второй и третьей камерой за 1 час 30 минут, можно сказать, что он наверняка превышал скорость на этом отрезке.

Ответ: Автомобиль наверняка превышал скорость на отрезке между второй и третьей камерами.

Задача 2. Мыло

2.1. Первое возможное решение

Изначально в бутылке было только мыло. Тогда каждый посетитель, выдавливая объем V, тратил ровно такой же объем мыла. После первого разбавления в бутылке оказалась смесь мыла и воды, в которой однут четверть занимает мыло и три четверти — вода. Тогда каждый посетитель, выдавливая тот же объем V, тратил бы лишь $V/4$ мыла. Однако, каждый посетитель после разбавления стал выдавливать объем $4V$ жидкости, и поэтому тратить тот же самый объем мыла V, что и до разбавления. Поэтому расход мыла не изменился после первого разбавления.

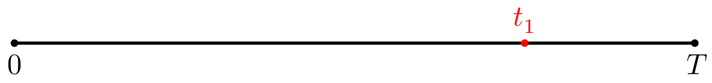
Сразу после второго разбавления в бутылке находится только $1/16$ часть мыла и $15/16$ частей воды. Тогда выдавливаемое количество мылы составляет $1/16$ часть от объема выдавленной жидкости. Однако теперь посетители выдавливают еще в четыре раза больше жидкости, то есть в 16 раз больше, чем изначально. Это значит, что они снова каждый раз выдавливают такое же количество мыла. Значит расход мыла не меняется и после второго разбавления.

Можно понять, что расход мыла не изменяется при любом количестве разбавлений. А тогда мыло в банке кончится за то же время, что и в случае, когда его не разбавляли водой, то есть за неделю.

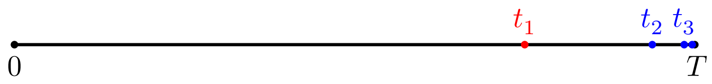
Ответ: через 7 дней.

2.2. Второе возможное решение

Введем числовую ось и обозначим на ней начальный момент, и момент T, когда мыло кончилось в первой бутылке. Найдем на ней время t_1, в которое произошло первое разбавление. Это произошло, когда израсходовалось $3/4$ бутылки, то есть прошло $3T/4$.



Теперь в момент t_1 у нас снова имеется полная бутылка жидкости, но расход жидкости увеличился втрое. Тогда до следующего разбавления пройдет вчетверо меньший промежуток времени. Но можно заметить, что оставшееся время до момента T тоже вчетверо меньше изначального. Тогда можно сказать, что до следующего разбавления пройдет $3/4$ оставшегося времени. По этому правилу можно найти момент t_2 второго разбавления и моменты t_n всех последующих.

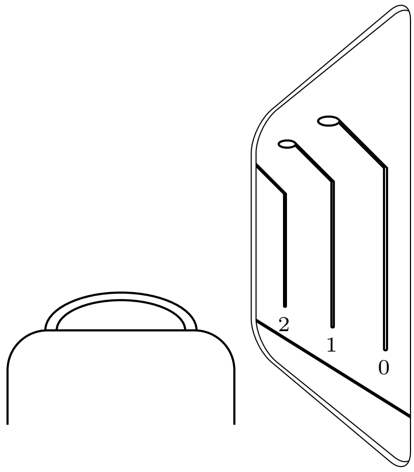


Тогда можно заметить, что каждое разбавление будет происходить все ближе к моменту T, но не позже. Кроме того, с каждым разбавлением мыла в бутылке становится все меньше, а значит в момент T его не останется вовсе.

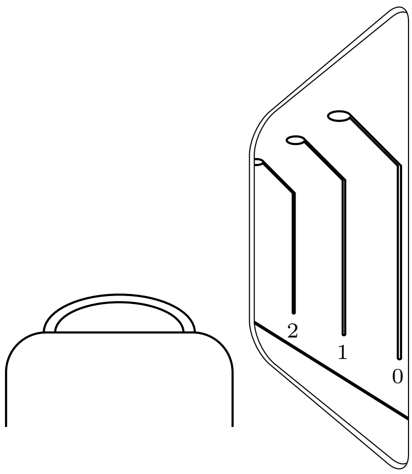
Ответ: через 7 дней.

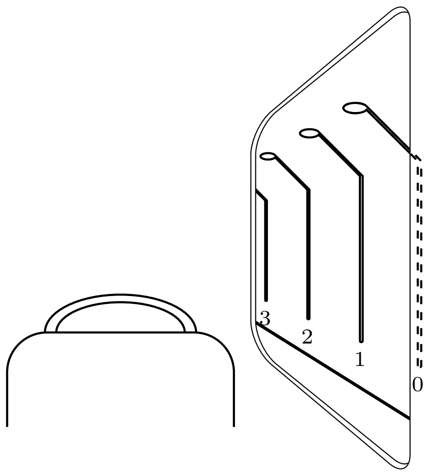
Задача 3. Дорожная

Мальчик наблюдает за движущимися относительно него фонарями и деревьями, имея ограниченный угол зрения. На рисунке представлено, что он видит из окна на примере фонарей. При движении каждый фонарь перемещается от левого края угла зрения к правому. Разумно считать фонарь тогда, когда его столб пересекает правый край. В таком случае один и тот же фонарь не будет учтен несколько раз.



Мальчик всегда видит ровно три фонаря. Тогда в тот момент, когда один из фонарей (фонарь 0) исчезает из поля зрения, в нем должен появляться следующий (фонарь 3). Иначе существовал бы такой промежуток времени, в котором в угле зрения находилось бы всего два фонаря, а это противоречит условию.





Фонарь 3 ровно через 1,5 пересечет край щели и займет положение фонаря 0. Кроме него за это время край щели пересекут еще фонари (1 и 2). Тогда мальчик насчитает 3 фонаря, кроме фонаря 0, который уже посчитан ранее. Значит можно сказать, что мальчик насчитывает 2 фонаря в секунду.

Аналогично будет выглядеть картина подсчета деревьев, только описанный процесс будет происходить не за 1 секунду, а за 4, и вместо 3 фонарей мальчик будет видеть 2 дерева в поле зрения. Тогда можно найти, что мальчик насчитывает 2 дерева в 4 секунды. А значит, насчитав 30 деревьев, он потратил 60 секунд и насчитал 120 фонарей.

Ответ: 120 фонарей.

Задача 4. Пулемет и поезд

Из того, что расстояние между всеми дырками одинаковое, можно сделать вывод о том, что за промежуток времени между выстрелами точка попадания сдвигается на постоянную величину x. То есть, при стрельбе по неподвижному поезду расстояние между любыми соседними дырками было бы равно x.

В случае, когда поезд движется направо, расстояние между дырками складывается из x и расстояния y, которое проходит поезд

$$x + y = 140 \text{ см}. \tag{10}$$

Если же поезд движется направо, то возможны два варианта. Поезд может проходить расстояние $y > x$, либо $y < x$. В обоих случаях расстояние между дырками будет равно 100 см, и будет равно разности x и y.

В первом сучае

$$x - y = 100 \text{ см}, \tag{11}$$

во втором

$$y - x = 100 \text{ см}. \tag{12}$$

В обоих случаях можно найти интересующий нас y. В первом случае $y = 20$ см, во втором — 120 см. Такое перемещение совершает поезд за время между выстрелами t, которое равно $1/5$ секунды. Тогда скорость поезда равна

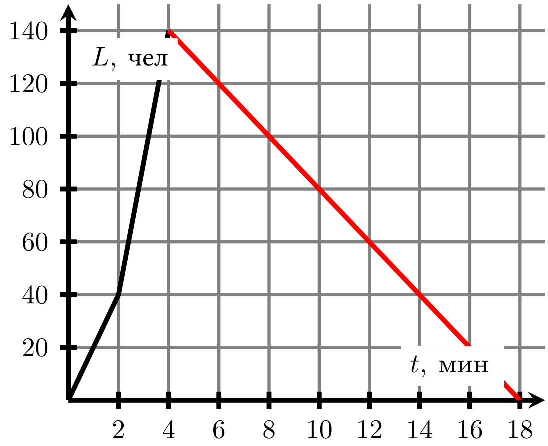
$$v = \frac{y}{t}, \tag{13}$$

и составляет 1 м/с для первого случая и 6 м/с для второго.

<u>Ответ:</u> 1 м/с и 6 м/с.

Задача 5. Эскалатор

Эскалатор можно рассмотреть как два параллельных пути, по которым люди спускаются либо стоя, либо идя пешком. Понятно, что спускаться пешком быстрее. Пусть стоя спускается N человек в минуту, а пешком — M человек в минуту. Тогда максимум может спускаться $2M$, минимум $2N$, а в стационарном режиме спускается $N + M$ человек в минуту.



Скорость роста очереди на каждом участкке можно определить по графику, поделив изменение ее длины на время, за которое оно произошло. Так, скорость роста очереди на первом участке равна 20 человек в минуту, на втором — 50 человек в минуту.

Эту скорость можно связать с количеством спускающихся людей и числом входящих на станцию. Если за минуту на станцию входит K человек, а спускается изначально $N + M$, то скорость роста очереди на первом участке будет равна $K - (N + M)$.

На втором участке люди стоят на обеих сторонах, а значит всего спускается $2N$ человек в минуту. Скорость роста очереди на втором участке равна $K - 2N$ и на 30 человек в минуту больше, чем на первом. Значит $M - N = 30$ человек в минуту.

После двух минут люди стали идти пешком по двум сторонам, и всего спускется $2M$ человек в минуту. Скорость роста очереди на этом участке равна $K - 2M$. Это на 30 человек в минуту меньше, чем на первом участке, а значит равна -10 человек в минуту.

По графику заметим, что через 4 минуты у эскалатора образовалась очередь из 140 человек. Тогда со скоростью 10 человек в минуту эта очередь сократится до нуля за

$$t = \frac{140 \text{ чел}}{10 \text{ чел/мин}} = 14 \text{ мин}. \tag{14}$$

Ответ: за 14 минут.