

Городской тур 2018/19. 11 класс

Задача 1.

Согласно условию, нагрев или охлаждение газа под поршнем происходит адиабатически, то есть за счет изменения объёма сосуда и совершения работы (для охлаждения газ квазистатически расширяют, совершая отрицательную работу). Теплообмен с окружающей средой и с тепловыми резервуарами происходит изотермически. Таким образом, если бы у инженера был только один тепловой резервуар, то он проводил бы обратный цикл Карно, состоящий из двух адиабат и двух изотерм (см. рис. 1).

В прямом цикле Карно газ *забирает* тепло Q_H у нагревателя (более горячего теплового резервуара), совершает за цикл положительную работу A и в ходе изотермического сжатия *отдает* тепло Q_X холодильнику (более холодному тепловому резервуару). При этом выполняется равенство

$$Q_H = A + Q_X. \quad (1)$$

КПД прямого цикла Карно зависит только от температур нагревателя T_H и холодильника T_X и равен

$$\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H}. \quad (2)$$

С другой стороны, как и у любой другой тепловой машины, КПД равен

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) можно легко получить связь между Q_H и Q_X :

$$Q_X = Q_H \frac{T_X}{T_H}. \quad (4)$$

В обратном цикле Карно газ *забирает* тепло Q_X у более холодного теплового резервуара, над газом за цикл совершают положительную работу A , и в ходе изотермического сжатия газ передает более горячему резервуару тепло Q_H . Соотношения (1) и (4) по-прежнему остаются верными.

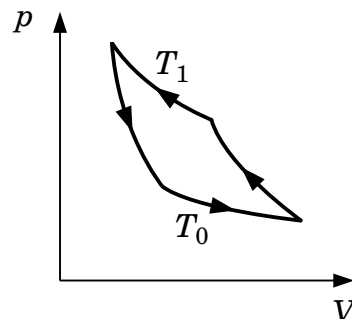


Рис. 1:

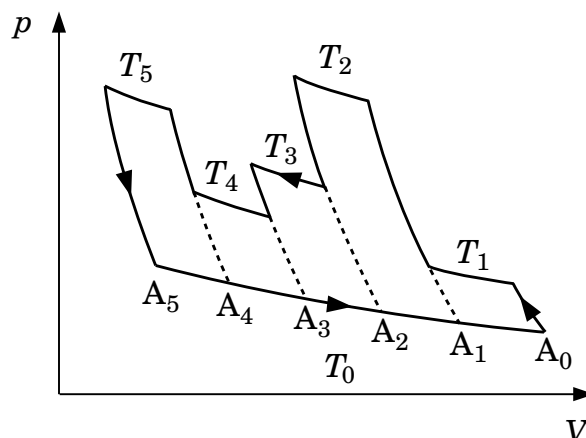


Рис. 2:

На рис. 2 схематично изображен цикл, проводимый инженером, когда у него есть $N = 5$ тепловых резервуаров. Дальнейшее рассуждение не использует конкретный вид цикла и количество резервуаров, поэтому это никак не ограничивает общность. Продлим все адиабаты до изотермы T_0 (пунктирные линии на рис. 2), при этом данная изотерма окажется разделённой на N частей: $A_1A_0, A_2A_1, \dots, A_NA_{N-1}$. Каждая из этих частей соответствует

маленькому циклу Карно, осуществляющему теплообмен с определённым тепловым резервуаром. По условию каждому тепловому резервуару было передано одинаковое количество теплоты. Обозначим это тепло через Q . Тогда полное тепло, переданное всем резервуарам, равно

$$Q_{\Pi} = NQ. \quad (5)$$

Используя соотношение (4) заключаем, что на участке $A_i A_{i-1}$ изотермы T_0 , располагающемся под изотермой T_i , газ под поршнем забирает от окружающей среды тепло

$$Q_i = Q \frac{T_0}{T_i}. \quad (6)$$

Таким образом, полное количество теплоты, отобранное у окружающей среды, равно

$$Q_o = \sum_i Q_i = QT_0 \sum_i \frac{1}{T_i}. \quad (7)$$

Наконец, находим, при какой температуре T_0 суммарное переданное резервуарам тепло более чем в два раза превосходит тепло, отобранное у окружающей среды:

$$Q_{\Pi} > 2Q_o \quad \Leftrightarrow \quad NQ > 2QT_0 \sum_i \frac{1}{T_i} \quad \Leftrightarrow \quad T_0 < \frac{1}{2} \frac{N}{\sum_i 1/T_i} = \frac{\bar{T}_{\text{гарм}}}{2}, \quad (8)$$

где в последнем равенстве по определению введена среднее гармоническая температура всех тепловых резервуаров.

Ответ: Температура окружающей среду должна удовлетворять условию $T_0 < (N / \sum_i 1/T_i) / 2 = \bar{T}_{\text{гарм}} / 2$.

Задача 2.

В решении использовано приближении параксиальных лучей, то есть предполагается, что изображение в системе линз создаётся лучами, слабо отклоняющимися от главной оптической оси.

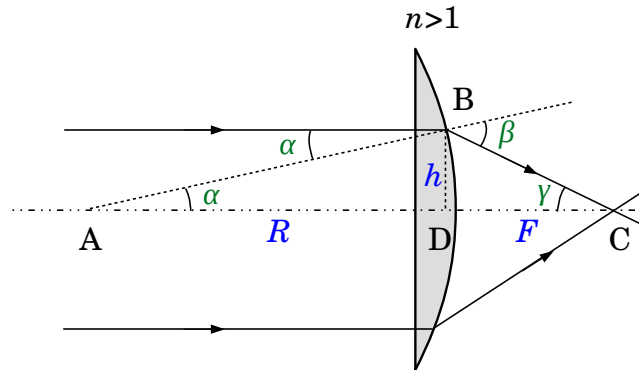


Рис. 3:

Разберём, что из себя представляет линза, сделанная из метаматериала с отрицательным показателем преломления. Для этого сначала вспомним, как работает обычная тонкая линза. На рис. 3 показан ход лучей, падающих на обычную тонкую собирающую линзу с $n > 1$ параллельно главной оптической оси. Рассмотрим треугольник ABC, где A — центр сферической поверхности линзы, B — точка преломления луча на этой поверхности, C — фокус. Из закона Снеллиуса следует, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}. \quad (9)$$

Угол β является внешним для треугольника ABC, поэтому имеет место соотношение

$$\beta = \alpha + \gamma.$$

Поскольку углы малые, из уравнения (9) получаем, что $\beta \approx n\alpha$. Кроме того, из прямоугольных треугольников ABD и BCD имеем

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{h}{R}, \quad \gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{F}. \quad (10)$$

Объединяя все вместе, получаем формулу для фокусного расстояния тонкой собирающей линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R}. \quad (11)$$

Естественно, что точно такой же результат можно получить, если рассмотреть параллельный пучок света, падающий не на плоскую, а на выпуклую сторону линзы (см. рис. 4).

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= n \sin \beta, \\ \sin \delta &= n \sin \gamma, \\ \alpha &= \beta + \gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

Считаем, что свет входит в линзу на расстоянии h_1 от главной оптической оси, а выходит на расстоянии h_2 . Поэтому в приближении параксиальных лучей

$$\alpha \approx \frac{h_1}{R}, \quad \delta \approx \frac{h_2}{F}.$$

Поскольку линза тонкая, $h_1 \approx h_2$. Объединив все равенства вместе, вновь можно получить формулу (11).

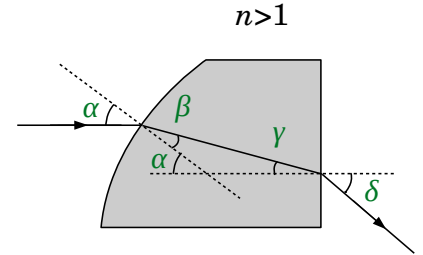


Рис. 4:

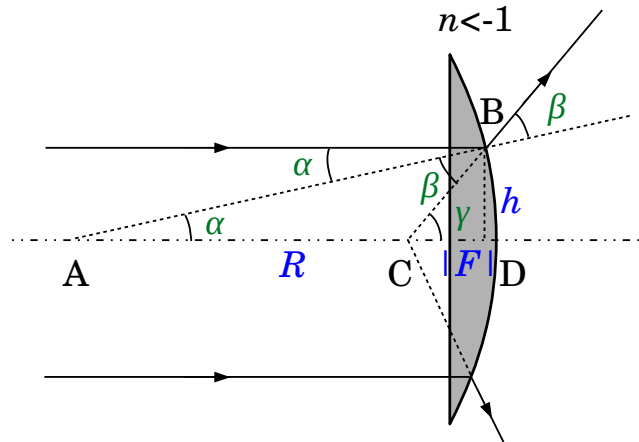


Рис. 5:

Рассмотрим теперь линзу из метаматериала с $n < -1$ (см. рис. 5). Из рис. 5 ясно, что такая линза является рассеивающей, она создает мнимое изображение. Получим формулу для фокусного расстояния тонкой линзы из метаматериала с отрицательным показателем преломления. На рис. 5 показан ход лучей, падающих параллельно главной оптической оси. Рассмотрим треугольник ABC, где A — центр сферической поверхности линзы, B — точка преломления луча на этой поверхности, C — фокус. Из закона Снеллиуса для метаматериала следует, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{|n|}. \quad (13)$$

Угол γ является внешним для треугольника ABC, поэтому имеет место соотношение

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Поскольку углы малые, из уравнения (13) получаем, что $\beta \approx |n|\alpha$. Кроме того, из прямоугольных треугольников ABD и BCD имеем

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{h}{R}, \quad \gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{|F|}. \quad (14)$$

Объединяя все вместе, получаем формулу для фокусного расстояния тонкой рассеивающей линзы из метаматериала

$$\frac{1}{|F|} = \frac{|n| + 1}{R}. \quad (15)$$

В формуле (15) мы поставили знак модуля у F , поскольку у рассеивающей линзы фокусное расстояние отрицательно. Можно рассмотреть падение лучей на выпуклую сторону линзы. Естественно, что результат (15) останется без изменений.

Исследуем теперь систему из двух вплотную расположенных линз, которая предложена в условии задачи. Пусть источник находится слева от линз на расстоянии $d > 0$. Поскольку первая линза рассеивающая с $n < -1$, получаем, что мнимое изображение, создаваемое этой линзой будет расположено слева от нее на расстоянии $f > 0$, которое можно найти, применив формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{|n| + 1}{R}. \quad (16)$$

Как уже отмечалось выше, в правой части (16) поставлен знак минус, поскольку линза рассеивающая. Рассмотрим теперь вторую линзу. Она собирающая с $n > 1$, и для нее мнимое изображение первой линзы является источником. Найдем, на какой расстоянии g будет находиться создаваемое ей изображение. Вновь применяя формулу тонкой линзы, получаем

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{n - 1}{R}. \quad (17)$$

Окончательно, складывая формулы (16) и (17), имеем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{g} = -\frac{2}{R}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что система из двух рассматриваемых линз эквивалентна одной рассеивающей линзе с фокусным расстоянием $F = -R/2$, не зависящим от абсолютной величины показателя преломления $|n|$. Следовательно, оптическая сила данной системы в вакууме равна $D = -2/R$. Кроме того, из (18) видно, что $g < 0$. Как и должно быть у рассеивающей линзы, она создает мнимое изображение.

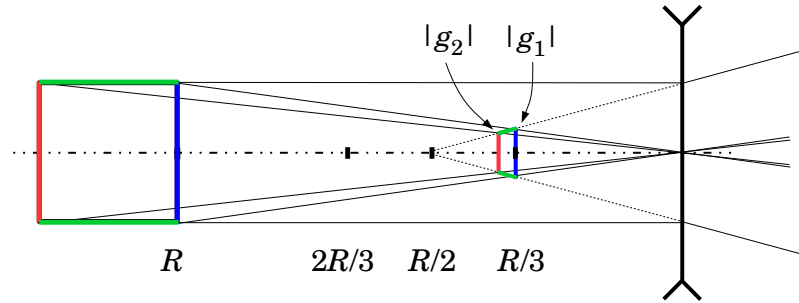


Рис. 6:

Наконец, изображение квадрата со стороной a в системе двух линз показано на рис. 6. Изображение представляет собой трапецию, основания которой расположены на расстояниях $|g_1|$ и $|g_2|$ от линз, где

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{|g_1|} = -\frac{2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad |g_1| = \frac{R}{3}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{R+a} - \frac{1}{|g_2|} = -\frac{2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad |g_2| = \frac{R(R+a)}{3R+2a}. \quad (20)$$

Длины большего и меньшего оснований равны, соответственно,

$$l_1 = \frac{a}{3}, \quad l_2 = a \frac{R}{3R+2a}. \quad (21)$$

Ответ: Оптическая сила системы линз в вакууме равна $-2/R$. Изображение квадрата построено на рис. 6.

Задача 3.

Для начала качественно опишем механизм возникновения углового ускорения у второго полукольца. В результате удара первое полукольцо начинает вращаться вокруг оси OO' , что приводит к изменению магнитного потока, пронизывающего контур. Вследствие этого возникает ЭДС индукции, и в цепи начинает течь электрический ток. На второе полукольцо начинает действовать сила Ампера, имеющая ненулевой момент относительно оси OO' . В результате второе кольцо получает угловое ускорение.

Решение задачи состоит из двух частей: нахождение силы индукционного тока и вычисление углового ускорения (рассмотрение динамики полукольца при наличии силы Ампера). Начнём с первой части задачи. Для нахождения ЭДС индукции требуется определить, с какой скоростью изменяется поток, пронизывающий контур. В силу того, что магнитное поле в начальный момент параллельно плоскости полукольца, исходное значение потока равно нулю. Пусть плоскость полукольца повернулась на небольшой угол $\Delta\alpha$. Тогда магнитный поток можно вычислить как произведение площади полукруга $S = \pi a^2/2$ и проекции магнитного поля на нормаль к плоскости полукольца $B \sin \Delta\alpha$:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} \pi a^2 B \sin \Delta\alpha \approx \frac{1}{2} \pi a^2 B \Delta\alpha, \quad (22)$$

где мы заменили синус малого угла на само значение $\Delta\alpha$. Скорость изменения магнитного потока тогда имеет вид

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \pi a^2 B \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2} \pi a^2 B \omega. \quad (23)$$

Учет следующих порядков по $\Delta\alpha$ не влияет на значение $\Delta\Phi/\Delta t$ в начальный момент времени, а следовательно, не влияет на финальный ответ к данной задаче. ЭДС индукции отвечает скорости изменения магнитного потока, что позволяет определить силу тока в цепи (в начальный момент) с использованием закона Ома:

$$I = \frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi a^2 B \omega}{2R}. \quad (24)$$

Направление силы тока определяется правилом Ленца.

Используя найденное значение силы тока, нам необходимо вычислить момент силы Ампера, действующей на второе полукольцо, и затем найти его угловое ускорение. Рассмотрим для этого небольшой участок полукольца соответствующей дуге $\Delta\varphi$ (см. рис. 7). Данный участок имеет длину $\Delta l = R\Delta\varphi$ и массу $\Delta m = (\Delta\varphi/\pi) m$. Модуль силы

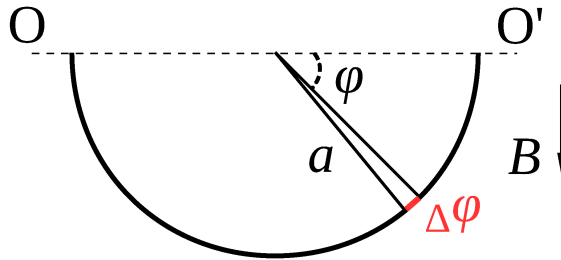


Рис. 7:

Ампера, действующей на этот участок равен $\Delta F_A = IB\Delta l \sin \varphi = I Ba \sin \varphi \Delta\varphi$. Для нахождения момента относительно оси OO' требуется домножить модуль силы ΔF_A на соответствующее плечо $a \sin \varphi$: $\Delta M_A = I Ba^2 \sin^2 \varphi \Delta\varphi$.

Полный момент силы Ампера, действующей на полукольцо, получается при суммировании по всем малым участкам. Данное суммирование может быть произведено за счет вычисления интеграла от функции $\sin^2 \varphi$. Однако, для решения задачи проводить интегрирование не требуется. Для вычисления углового ускорения нужно записать выражение для момента инерции малого участка кольца относительно оси OO' : $\Delta J = \Delta m (a \sin \varphi)^2 = (m/\pi) a^2 \sin^2 \varphi \Delta\varphi$. Мы видим, что вклады в момент инерции и в момент силы пропорциональны для каждого малого участка полукольца, что позволяет сократить суммы без их вычисления:

$$\beta = \frac{\sum \Delta M}{\sum \Delta J} = \frac{I Ba^2 \sum \sin^2 \varphi \Delta\varphi}{(m/\pi) a^2 \sum \sin^2 \varphi \Delta\varphi} = \frac{\pi I B}{m}. \quad (25)$$

Подставляя сюда значение силы тока (24), получаем ответ на вопрос задачи:

$$\beta = \frac{\pi^2 B^2 a^2 \omega}{2mR}. \quad (26)$$

По правилу Ленца второе полукольцо начнёт отклоняться от своего начального положения в направлении, противоположном направлению вращения первого полукольца.

Ответ: Угловое ускорение второго полукольца равно $\beta = \pi^2 B^2 a^2 \omega / (2mR)$. Второе полукольцо начнёт вращение в направлении, противоположном вращению первого полукольца.

Задача 4.

Рассмотрим сначала равновесие трубы до того, как Сизиф перестал её удерживать. Силы, действующие на трубу указаны на рис. 8. Запишем условия равновесия трубы:

$$N = mg \cos \alpha, \quad (27)$$

$$T = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (28)$$

$$F_{\text{тр}} R = M, \quad (29)$$

где M — момент трения качения, удовлетворяющий условию $|M| \leq fN$. Проекция силы трения $F_{\text{тр}}$ подчиняется условию $|F_{\text{тр}}| \leq \mu N$. Решая уравнения (27)–(29) относительно M и $F_{\text{тр}}$ и используя приведённые неравенства,

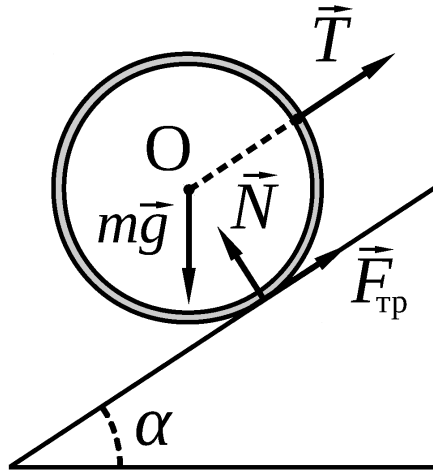


Рис. 8:

получаем два условия на модуль силы \vec{T} :

$$|T - mg \sin \alpha| \leq \mu mg \cos \alpha, \quad (30)$$

$$|T - mg \sin \alpha| \leq \frac{f}{R} mg \cos \alpha. \quad (31)$$

Оба этих неравенства должны выполняться одновременно, так что можно записать

$$|T - mg \sin \alpha| \leq \xi mg \cos \alpha, \quad \text{где } \xi = \min \{ \mu, f/R \}. \quad (32)$$

Заметим, что в зависимости от знака разности $T - mg \sin \alpha$ величины $F_{\text{тр}}$ и M могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательные значения соответствуют противоположному направлению силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (вниз вдоль плоскости) и противоположному направлению момента \vec{M} (сила \vec{N} стремится вращать трубу против хода часовой стрелки).

Перейдём теперь к рассмотрению качения трубы по наклонной плоскости. Сразу заметим, что ввиду наличия вращения момент силы трения качения будет максимальным ($M = fN$). С другой стороны, считать, что $F_{\text{тр}} = \mu N$,

по-прежнему нельзя, т. к. труба движется без проскальзывания. Вместо этого имеет место кинематическая связь линейного ускорения оси трубы a и углового ускорения β : $a = \beta R$.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вдоль наклонной плоскости, и ось, перпендикулярную плоскости, а также уравнение динамики вращательного движения:

$$N = mg \cos \alpha, \quad (33)$$

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (34)$$

$$mR^2\beta = F_{\text{тр}} R - fN. \quad (35)$$

Данную систему уравнений следует дополнить кинематической связью $a = \beta R$. Решая систему относительно $F_{\text{тр}}$ и a , получаем

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} mg \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{f}{R} \right), \quad (36)$$

$$a = \frac{1}{2} g \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{f}{R} \right). \quad (37)$$

Вспоминая, что $|F_{\text{тр}}| \leq \mu N$, получаем условие на коэффициент трения μ :

$$\mu \geq \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{f}{R} \right). \quad (38)$$

Ответ: $|T - mg \sin \alpha| \leq \xi mg \cos \alpha$, где $\xi = \min \{ \mu, f/R \}$; $\mu \geq (1/2)(\operatorname{tg} \alpha + f/R)$, $a = (1/2) g \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f/R)$.

Задача 5.

Обозначим через C точку, в которой отпускают шарик (см. рис. 9). Пусть время, за которое сетка поворачивается на 360° , равно T . По условию, траектория шарика есть плоская замкнутая линия, которую шарик замыкает за время $2T$. Таким образом, через время $2T$ после начала движения шарика вся система возвращается в исходное состояние: сетка совершает два полных оборота вокруг оси AB , шарик вновь оказывается в точке C , а его скорость обращается в нуль. Действительно, если скорость шарика будет отличаться от нуля через время $2T$, то он не сможет далее двигаться вдоль своей траектории. Таким образом, вся система “сетка+шарик” совершает периодические движения с периодом $2T$.

Кроме того известно, что за один оборот вдоль траектории, то есть за период $2T$, шарик встречает сетку два раза. Ясно, что первая встреча происходит в точке C в начале периода. Следующая встреча в точке C (через время $2T$) относится уже к следующему обороту вдоль траектории, к другому периоду. Поймём, где происходит вторая встреча. Для определенности будем считать, что на рис. 9 сетка вращается по часовой стрелке. Заряды шарика и сетки имеют противоположные знаки, поэтому шарик из точки C начинает двигаться вправо. Обратим время и будем следить за развитием событий в обратном порядке. При этом сетка будет вращаться в противоположном направлении (против часовой стрелки), а шарик, увлекаемый сеткой, начнет двигаться по своей траектории влево. Поскольку начальная скорость шарика в точке C равна нулю, два эти движения (когда сетка вращается “по” и “против” часовой стрелке) симметричны относительно оси OC . Так как траектория должна быть непрерывной линией, заключаем, что через время T шарик должен оказаться на оси OC . К этому времени сетка совершит один полный оборот и вернется в исходное положение. Таким образом, вторая встреча сетки и шарика происходит через время T после начала движения шарика вдоль траектории. Других встреч по условию нет.

Исследуем более детально траекторию шарика на отрезке времени $[0, T]$ между двумя последовательными встречами с сеткой. Сетка равномерно заряжена, поэтому она создает однородное электрическое поле, которое притягивает шарик с постоянной по модулю силой F . Сетка вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega = 2\pi/T$, поэтому вектор силы, действующей на шарик, также поворачивается. Таким образом, вектор ускорения шарика

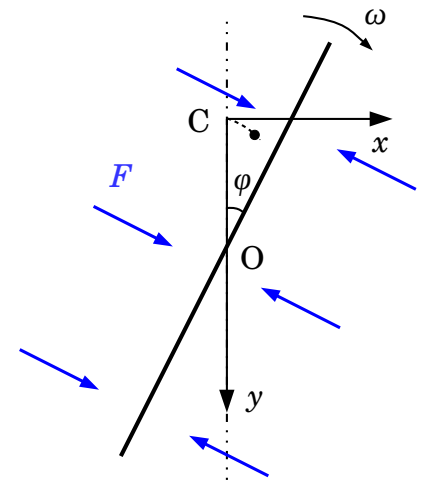


Рис. 9:

имеет постоянную величину $a = F/m$ и вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω . Аналогичное поведение вектора ускорения характерно для движения по окружности с постоянной скоростью. Действительно, если запустить тело со скоростью $V = a/\omega$ по окружности радиуса $R = a/\omega^2$, то его центростремительное ускорение будет равно

$$a_{\text{ц}} = \frac{V^2}{R} = \frac{(a/\omega)^2}{(a/\omega^2)} = a,$$

и полный оборот оно будет совершать в точности за время

$$t = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi(a/\omega^2)}{a/\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = T.$$

Введём оси так, как показано на рис. 9. Перейдём в систему отсчета, которая движется со скоростью V вдоль оси y . В этой системе отсчета скорость шарика в начальный момент равна V , направлена против оси y и перпендикулярно ускорению. Следовательно, в этой системе отсчёта шарик будет вращаться по окружности с постоянной скоростью V . За время T до второй встречи с сеткой шарик успеет совершить один оборот вокруг окружности. В исходной системе отсчёта траектория шарика будет представлять собой дугу циклоиды, поскольку на движение по окружности со скоростью V накладывается движение центра окружности с такой же по величине скоростью (см. рис. 10). Когда шарик через время T приходит в точку D (см. обозначение на рис. 10), его скорость обращается в нуль. В этот момент сетка “догоняет” шарик, проходит мимо него и вновь начинает увлекать его за собой. В результате шарик начинает движение по симметрично расположенной дуге циклоиды и возвращается в исходную точку C еще через время T , замыкая свою траекторию. Вторая половина траектории в точности копирует первую. Заметим, что точка O должна располагаться посередине отрезка CD, чтобы сетка не “догнала” шарик раньше. При этом выполняется равенство

$$|OC| = |OD| = \pi R.$$

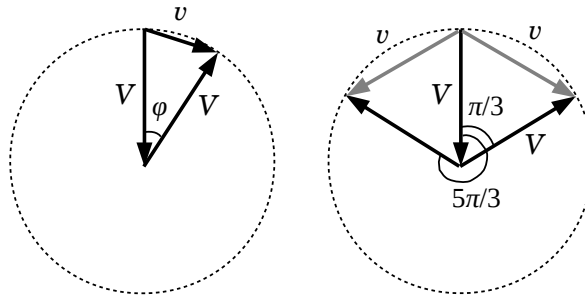


Рис. 11:

Наконец, найдём ответ на вопрос задачи. Достаточно рассмотреть первую половину периода, то есть движение на отрезке времени $[0, T]$. Величину скорости шарика v в любой момент времени можно определить, сложив скорость вращения шарика по окружности и скорость смещения центра окружности (см. левую часть рис. 11). Угол между векторами этих скоростей равен углу поворота сетки $\varphi = \omega t$. Ясно, что скорость шарика максимальна, когда оба вектора сонаправлены, то есть через время $T/2$ после начала движения. Максимальная скорость равна $v_{\text{max}} = 2V$. Соответственно, максимальная кинетическая энергия равна

$$E_{\text{max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = 2mV^2$$

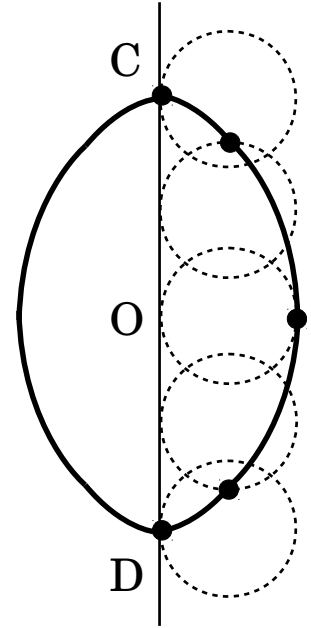


Рис. 10:

Кинетическая энергия превышает четверть от своего максимального значения, когда скорость шарика больше V . Для этого угол поворота сетки φ должен лежать в диапазоне $[\pi/3, 5\pi/3]$ (см. правую часть рис. 11). Таким образом, доля времени, когда кинетическая энергия шарика превышает четверть от своего максимального значения, равна

$$\frac{(5\pi/3 - \pi/3)}{2\pi} = \frac{2}{3}. \quad (39)$$

Заметим, что закон движения шарика можно получить явно, проанализировав уравнение движения. Действительно, в проекциях на оси x и y зависимость ускорения шарика от времени имеет вид

$$a_x(t) = a \cos \omega t, \quad (40)$$

$$a_y(t) = a \sin \omega t. \quad (41)$$

Воспользовавшись аналогией с колебательными движениями (или просто проинтегрировав уравнения (40) и (41)), получаем

$$v_x(t) = V_x + \frac{a}{\omega} \sin \omega t, \quad (42)$$

$$v_y(t) = V_y - \frac{a}{\omega} \cos \omega t, \quad (43)$$

где константы V_x и V_y необходимо определять из начальных данных. При $t = 0$ скорость шарика равна нулю, поэтому заключаем, что $V_x = 0$, а $V_y = a/\omega$. Таким образом,

$$v_x(t) = \frac{a}{\omega} \sin \omega t, \quad (44)$$

$$v_y(t) = \frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega} \cos \omega t. \quad (45)$$

В принципе, этого достаточно для того, чтобы ответить на вопрос задачи. Однако, получим также, закон движения шарика. Еще раз воспользовавшись аналогией с колебаниями (или проинтегрировав уравнения (44) и (45)), получаем

$$x(t) = X - \frac{a}{\omega^2} \cos \omega t, \quad (46)$$

$$y(t) = Y + \frac{a}{\omega} t - \frac{a}{\omega^2} \sin \omega t, \quad (47)$$

где X и Y необходимо определить из начальных условий. Мы выбрали начало координат в точке C , поэтому $X = a/\omega^2$ и $Y = 0$. Таким образом,

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2} - \frac{a}{\omega^2} \cos \omega t, \quad (48)$$

$$y(t) = \frac{a}{\omega} t - \frac{a}{\omega^2} \sin \omega t. \quad (49)$$

Уравнения (46) и (47) описывают циклоиду.

Ответ: $2/3$ времени кинетическая энергия шарика превышает четверть от своего максимального значения.