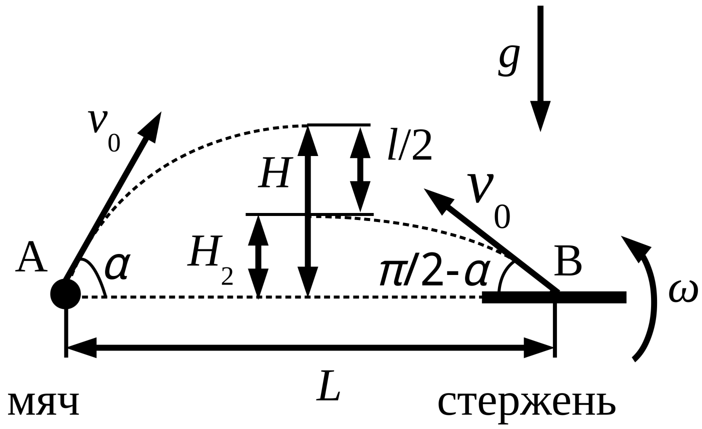

Рис. 1:

Городской тур 2016/17. 10 класс

Задача 1.

Центр масс стержня движется так, как если бы вся его масса была сосредоточена в этой точке. Так как сопротивлением воздуха можно пренебречь, центр масс стержня и мяч двигаются по параболам.

Согласно условию, стержень был запущен с такой же скоростью, что и мяч. Обозначим эту скорость через v_0. Известно, что стержень преодолел расстояние между жонглерами быстрее, чем мяч. Рассмотрим формулу для дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \tag{1}$$

здесь α – угол, под которым было брошено тело. Ясно, что при углах вылета α и $\pi/2 - \alpha$ тела пролетят одинаковые расстояния. При этом, поскольку время полета определяется выражением

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \tag{2}$$

заключаем, что при $\alpha > \pi/4$, тело, брошенное под углом $\pi/2 - \alpha$ достигнет цели быстрее. Таким образом, обозначая угол вылета мяча через α, приходим к выводу, что $\alpha > \pi/4$, а стержень был запущен под углом $\pi/2 - \alpha$ (см. Рис. 1).

Определим угол α и величину начальной скорости v_0. По условию, расстояние между жонглерами равно L, а максимальная высота мяча H. Таким образом,

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \qquad H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{3}$$

Решая систему двух этих уравнений, находим

$$v_0^2 = 2g\left(H + \frac{L^2}{16H}\right), \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{L}{4H}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь момент касания мяча и стержня. Касание произошло, когда мяч находился в верхней точке своей траектории. Так как нас интересует минимальная длина стержня, при которой возможно такое касание, заключаем, что в момент касания центр масс стержня находился в вершине своей параболы, а сам стержень был ориентирован вертикально. Найдем положение центра масс стержня в момент касания

$$H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2(\pi/2 - \alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{2g} = \frac{L^2}{16H}. \tag{5}$$

Отсюда сразу находим минимальную длину стержня

$$\frac{l}{2} = H - H_2 \quad \Leftrightarrow \quad l = 2H\left(1 - \frac{L^2}{16H^2}\right). \tag{6}$$

Обсудим теперь, через какое время после броска мяча был совершен бросок стержня. Мяч поднимался до верхней точки своей траектории в течение времени

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{7}$$

Стержню потребовалось на это меньшее время

$$t_2 = \frac{v_0 \sin(\pi/2 - \alpha)}{g} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{L}{4H}. \tag{8}$$

Следовательно, стержень был запущен через время

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1 - \frac{L}{4H}\right) \tag{9}$$

после мяча.

Остается ответить на последний вопрос задачи об угловой скорости вращения стержня. Как уже было отмечено выше, стержень в верхней точке своей траектории должен быть ориентирован вертикально. Таким образом, за время t_2 он должен повернуться на угол $\pi/2 + k\pi$, где k — целое неотрицательное число.

$$\omega t_2 = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{2H}}\frac{4H}{L}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right). \tag{10}$$

Возможно бесконечное количество разных угловых скоростей.

Завершая обсуждение данной задачи, следует отметить, что выражения (6) и (9) обращаются в нуль при $L = 4H$. Это условие соответствует броску под углом $\pi/4$.

Ответ: Минимальная длина стержня, при которой возможно касание мяча, дается выражением (6). В этом случае стержень следует бросать через время (9) после мяча. Возможные угловые скорости определяются выражением (10).

Задача 2.

Определим возможные значения коэффициента трения и силу реакции в шарнире B из условий равновесия системы. Рассмотрим сначала силы, действующие на цилиндр (см. Рис. 2). Направления силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, и двух компонент искомой силы реакции шарнира $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$ выбраны условно. Значения проекций этих сил могут оказаться отрицательными, если в действительности направления сил другие. Запишем условия равновесия в проекции на оси x и y:

$$x: \quad F_{\text{тр}}\cos\alpha + R_x - N\sin\alpha = 0, \qquad y: \quad Mg + R_y - N\cos\alpha - F_{\text{тр}}\sin\alpha = 0. \tag{11}$$

Кроме того, запишем условия моментов относительно оси C (ось цилиндра):

$$F_{\text{тр}}r - R_x r = 0, \tag{12}$$

где r — радиус цилиндра.

Три уравнения (11), (12) содержат четыре неизвестных. Дополнительное уравнение мы получим, рассмотрев равновесие стержня. На Рис. 3 указаны силы, действующие на стержень. Сила, действующая в шарнире B, имеет теперь противоположное направление по третьему закону Ньютона. Сила $\vec{R}'$ в шарнире A нам неизвестна. В принципе, ее можно найти, рассмотрев условия равновесия сил, действующих на стержень, однако нам не требуется это делать. Запишем лишь условие моментов относительно оси A (в этом случае неизвестная сила $\vec{R}'$ в уравнении не участвует):

$$mg\,\frac{l}{2} - R_y\,l = 0, \tag{13}$$

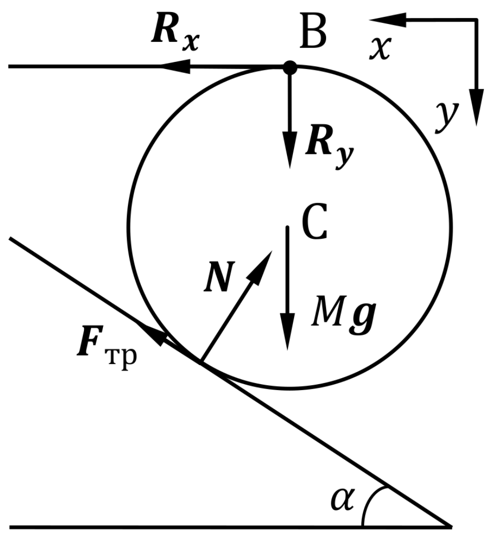

Рис. 2:

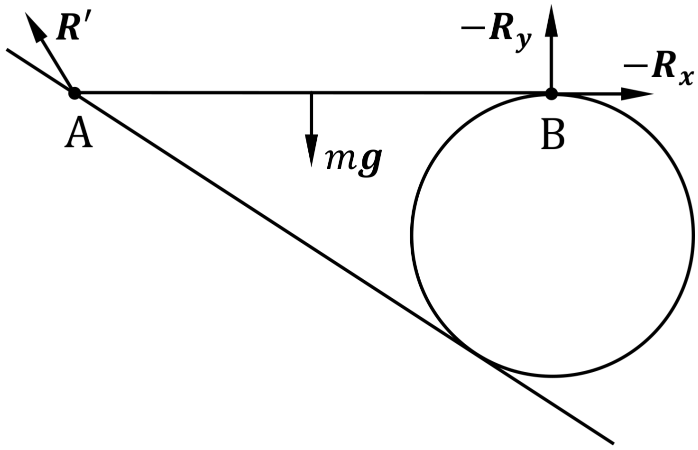

Рис. 3:

где l — длина стержня. Решая систему уравнений (11), (12) и (13), получаем:

$$N = \left(M + \frac{m}{2}\right) g, \tag{14}$$

$$F_{тр} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} N = N \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \tag{15}$$

$$R_x = F_{тр} = \left(M + \frac{m}{2}\right) g \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \tag{16}$$

$$R_y = \frac{mg}{2}. \tag{17}$$

С учетом условия $|F_{тр}| \le \mu N$ из уравнения (15) следует $\mu \ge \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Это и есть ответ на первый вопрос задачи. Заметим, что данное условие можно было найти, рассмотрев моменты сил, действующих на цилиндр, относительно оси B. В этом случае можно увидеть, что полная сила реакции со стороны наклонной плоскости $(\vec{N} + \vec{F}_{тр})$ должна быть направлена к точке B, т. к. моменты остальных сил равны нулю. К такому же выводу можно прийти, вспомнив правило трех сил. Зная направление силы, нетрудно найти отношение ее проекций: $F_{тр}/N = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. С другой стороны, мы имеем условие $\mu \ge |F_{тр}|/N$, которое приводит к полученному выше ответу.

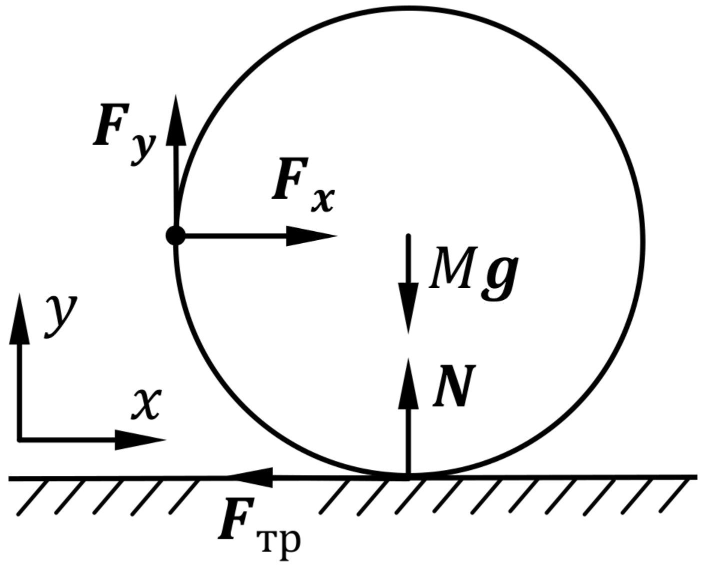

Рис. 4:

Силу $\vec{R}$ в шарнире B можно задать при помощи проекций R_x и R_y, определяемых выражениями (16) и (17).

Ответ: Коэффициент трения между цилиндром и плоскостью может принимать значения $\mu \geq \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Сила реакции в шарнире B задается ее проекциями: $R_x = (M + m/2)g\operatorname{tg}(\alpha/2)$, $R_y = mg/2$.

Задача 3.

В силу закона сохранения импульса угловая скорость вращения цилиндра в первый момент времени после удара равна нулю. Действительно, если бы это было не так, то возник бы ненулевой импульс вдоль вертикальной оси за счет поворота пули вместе с цилиндром. На Рис. 4 указаны силы, действующие на цилиндр. Со стороны пули на цилиндр действует некоторая сила $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$F_y + N - Mg = 0. \tag{18}$$

Уравнение для проекций на ось x выписывать не будем, т. к. нам не понадобится находить горизонтальное ускорение системы. Для определения углового ускорения цилиндра необходимо иметь динамическое уравнение вращательного движения. Такое уравнение можно получить, разбив цилиндр на маленькие кусочки массы ΔM и записав второй закон Ньютона для каждого из этих кусочков:

$$\vec{F}_i + \Delta M\vec{g} + \vec{F}_i^{(\text{вн})} = \Delta M\vec{a}_x + \Delta M\vec{a}_i^{(\text{вр})}, \tag{19}$$

где $\vec{F}_i$ — сила, действующая на i-ый кусочек со стороны соседних, $\vec{F}_i^{(\text{вн})}$ — внешняя сила (не включая силу тяжести и силы со стороны других кусочков), $\vec{a}_x$ — ускорение поступательного движения системы вдоль оси x, $\vec{a}_i^{(\text{вр})}$ — ускорение i-ого кусочка, связанное с вращением. Спроецируем уравнение (19) на касательное направление (по ходу часовой стрелки) для каждого кусочка :

$$(\vec{F}_i)_\tau + (\Delta M\vec{g})_\tau + (\vec{F}_i^{(\text{вн})})_\tau = (\Delta M\vec{a}_x)_\tau + (\Delta M\vec{a}_i^{(\text{вр})})_\tau. \tag{20}$$

Просуммируем теперь это уравнение по всем кусочкам (по i). Вклад от первого слагаемого в уравнении будет нулевым по третьему закону Ньютона. Вклад от силы тяжести (второе слагаемое) тоже пропадет. Это легко увидеть, попарно рассмотрев диаметрально противоположные кусочки. По той же причине сумма слагаемых $(\Delta M\vec{a}_x)_\tau$ окажется равной нулю. Сумма проекций внешних сил даст нам $F_y + F_{\text{тр}}$. Последнее же слагаемое легко просуммировать, заметив, что $(\vec{a}_i^{(\text{вр})})_\tau = \beta R$, где β — искомое угловое ускорение, а сумма всех ΔM равна всей массе цилиндра M. Таким образом, имеем

$$F_y + F_{\text{тр}} = M\beta R. \tag{21}$$

Это уравнение можно было получить сразу, зная уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела. В нашем случае

$$I\beta = (F_y + F_{\text{тр}})R, \tag{22}$$

где в правой части стоит момент сил относительно оси цилиндра, а I — момент инерции цилиндра относительно этой же оси. Все массивные элементы цилиндра находятся на расстоянии R от его оси. Таким образом, $I = MR^2$. Видно, что уравнение (22) совпадает с (21).

Рассмотрим теперь динамику пули. Уравнение движения в проекции на ось y будет иметь вид

$$-F_y - mg = ma_y^{(\text{пуля})} = m\beta R. \tag{23}$$

Решая систему уравнений (18), (21) и (23) с учетом соотношения $F_{\text{тр}} = \mu N$ (цилиндр проскальзывает, скорость его нижней точки направлена вправо), получаем:

$$\beta = \frac{\mu(m+M) - m}{m + M - \mu m}\,\frac{g}{R}, \tag{24}$$

$$N = \frac{(2m+M)Mg}{m + M - \mu m}. \tag{25}$$

Заметим, что при приближении μ слева к значению $\mu_0 = (m+M)/m$ угловое ускорение и сила реакции опоры стремятся к бесконечности: β, $N \to +\infty$. Это означает, что вертикальная составляющая импульса на самом деле может измениться, ведь импульс бесконечно большой силы, действующей бесконечно малое время (время удара) не обязан быть нулевым: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$. Однако, нам не требуется проводить анализ задачи в области $\mu \geq \mu_0$, т. к. по условию $m < M$, а следовательно, $\mu_0 = (m+M)/m > (m+m)/m = 2$. Но в условии также сказано, что $\mu < 2$, а значит, величина N всегда конечна и выражения (24) и (25) остаются верными. Знаменатель в (24) заведомо больше нуля, в то время как числитель может иметь разный знак. Действительно, при $\mu < \mu_1 = m/(m+M)$ угловое ускорение отрицательно, т. е. цилиндр начнет вращаться против хода часовой стрелки (влияние тяжелой пули оказывается более значительным, чем трение о поверхность). При $\mu > \mu_1$, наоборот, трение становится сильным и цилиндр будет вращаться по ходу часовой стрелки. Заметим, что величина μ_1 может принимать любые значения из промежутка $0 < \mu_1 < 1/2$.

Перейдем ко второй части задачи. Для нахождения выделившегося тепла воспользуемся законом сохранения энергии. Пока для определенности будем считать, что цилиндр повернулся на угол φ по часовой стрелке. Пусть в данный момент времени скорость оси цилиндра равна $\vec{v}_0$. Перейдем в систему отсчета оси цилиндра. В этом случае он вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω, линейная скорость вращения $\vec{v}_1$ пули вокруг оси равна $|\vec{v}_1| = \omega R$ (см. Рис. 5). Запишем энергию пули в этой системе отсчета:

$$E_{\text{п}}^{(0)} = mgR\sin\varphi + \frac{m(\vec{v}_1)^2}{2}. \tag{26}$$

При переходе в исходную систему отсчета скорость $\vec{v}_1$ нужно заменить на $\vec{v}_1 + \vec{v}_0$. Тогда энергия пули в исходной системе отсчета равна

$$E_{\text{п}} = mgR\sin\varphi + \frac{m}{2}(v_1^2 + v_0^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_0) = mgR\sin\varphi + \frac{m\omega^2R^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} + m\omega R v_0\sin\varphi. \tag{27}$$

Аналогичным образом можно найти энергию цилиндра:

$$E_{\text{ц}} = \frac{M\omega^2R^2}{2} + \frac{Mv_0^2}{2}. \tag{28}$$

Вклада от скалярного произведения в данном случае не возникает, т. к. скалярные произведения для диаметрально противоположных точек цилиндра в точности компенсируют друг друга.

Осталось выразить скорость v_0 через данную в условии задачи v. Для этого нужно посмотреть, как преобразуется горизонтальная проекция скорости центра масс C (см. Рис. 5) при переходе из системы отсчета оси цилиндра в лабораторную систему отсчета. Нетрудно получить соотношение

$$v = \omega r\sin\varphi + v_0, \tag{29}$$

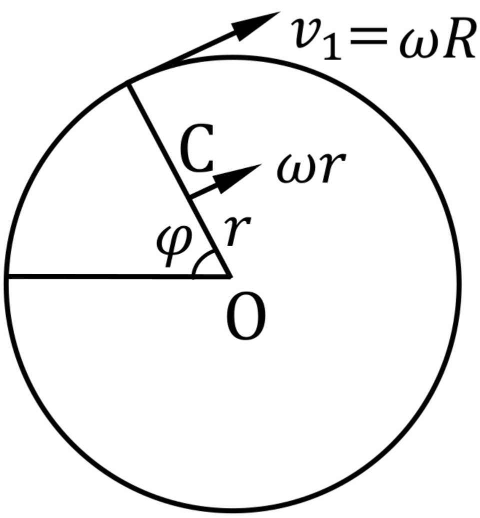

Рис. 5:

где r — расстояние от оси цилиндра до центра масс системы (r = OC). Величину r легко найти по определению центра масс или с использованием правила моментов:

$$Mr = m(R - r) \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{m}{m + M}\, R. \tag{30}$$

Закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{mu^2}{2} = E_{\text{п}} + E_{\text{ц}} + Q, \tag{31}$$

где Q — искомое количество теплоты. Отсюда с использованием выражений (27)–(30) получаем

$$Q = \frac{mu^2}{2} + \frac{m^2}{2(m + M)}\, \omega^2 R^2 \sin^2\varphi - \frac{m + M}{2}\, (v^2 + \omega^2 R^2) - mgR\sin\varphi. \tag{32}$$

Отметим, что в случае вращения цилиндра против часовой стрелки последнее слагаемое будет иметь противоположный знак.

Ответ: Угловое ускорение в начальный момент $\beta = (g/R)[\mu(m + M) - m]/(m + M - \mu m)$. При $\mu < \mu_1 = m/(m + M)$ цилиндр будет вращаться против часовой стрелки, при $\mu > \mu_1$ — по часовой стрелке. Количество теплоты, которое выделилось в системе, задается выражением (32) (при вращении против часовой стрелки у последнего слагаемого следует изменить знак).

Задача 4.

По условию пружины вначале не деформированы, поэтому не действуют на поршни. Это значит, что в начальный момент вес поршней уравновешен только силами давления газа. Из условия равновесия верхнего поршня получаем, что давление газа под ним (в верхнем отсеке) равно $p_0 = mg/S$, где S – площадь поршня. На нижний поршень сверху действует сила давления газа из верхнего отсека $p_0 S = mg$, а снизу – сила давления газа нижнего отсека. Так как разность этих сил уравновешивает вес нижнего поршня mg, значит сила давления в нижнем отсеке равна $2mg$. Поэтому давление газа в нижнем отсеке первоначально равно $2p_0$.

Обозначим давление газа в обоих отсеках после установления равновесия через p. Предположим, после установления равновесия верхняя пружины сожмется на x_1, а нижняя – на x_2. Если на самом деле какая-то пружина не сожмется, а наоборот растянется, это будет соответствовать отрицательному значению x_1 или x_2. С помощью введенных обозначений несложно выразить конечные объёмы отсеков с газом, $V_1 = (L - x_1)S$ и $V_2 = (L - x_2)S$.

Запишем с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева количество вещества в отсеках в начале, ν_1 и ν_2, а именно, $\nu_1 = p_0 LS/(RT)$, $\nu_2 = 2p_0 LS/(RT)$. Суммарное количество вещества $\nu_1 + \nu_2 = 3p_0 LS/(RT)$

в конце находится при давлении p в объёме $V_1 + V_2$, а температура T по условию не изменилась, поэтому

$$\nu_1 + \nu_2 = \frac{p(V_1 + V_2)}{RT} \qquad \Rightarrow \qquad 3\frac{mg}{S}L = p(2L - x_1 - x_2). \tag{33}$$

В конце, после установления равновесия, силы, действующие на каждый поршень, снова скомпенсированы. Для верхнего поршня это теперь условие

$$mg = pS + kx_1. \tag{34}$$

Нижний же поршень в конце испытывает равное давление газа p сверху и снизу, поэтому сила тяжести, действующая на него, скомпенсирована разницей сил натяжения пружин:

$$mg + kx_1 = kx_2. \tag{35}$$

Разрешим систему уравнений (33)-(35). Для дальнейшего анализа удобно избавиться от большого количества размерных параметров, введя относительное сжатие пружин $\alpha_{1,2} = x_{1,2}/L$ — это позволит сократить L в (33). В оставшихся двух уравнениях переход к $\alpha_{1,2}$ позволяет выделить безразмерный параметр $a = mg/(kL)$, и система (33-35) принимает вид

$$3a = \frac{pS}{kL}(2 - \alpha_1 - \alpha_2), \qquad a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1, \qquad a + \alpha_1 = \alpha_2. \tag{36}$$

Выражая здесь из второго уравнения величину $pS/(kL) = a - \alpha_1$, и подставляя её в первое уравнение вместе с α_2 из третьего, получим квадратное уравнение на α_1:

$$3a = (a - \alpha_1)(2 - a - 2\alpha_1).$$

Раскрывая скобки, $2\alpha_1^2 - (a+2)\alpha_1 - a(a+1) = 0$, находим два решения для верхней пружины:

$$\alpha_1 = \frac{a + 2 \pm \sqrt{(a+2)^2 + 8a(a+1)}}{4} = \frac{a + 2 \pm (3a+2)}{4}.$$

Легко видеть, что если взять «решение с плюсом», получится $\alpha_1 = 1 + a$. Но a – положительная величина, а относительное сжатие α_1 не может превышать 1 (также как обычное сжатие x_1 не может превысить длину недеформированной пружины L). Значит, такое решение нефизично (можно также убедиться, что его использование приводит к отрицательному p). Зато решение «с минусом» даёт вполне физический ответ $\alpha_1 = -a/2$, $\alpha_2 = a/2$.

Итак, казалось бы решение найдено: верхняя пружина растянется на $x_1 = L\alpha_1 = mg/(2k)$, а нижняя настолько же сожмётся. Однако, следует учесть, что относительное сжатие второй пружины $\alpha_2 = a/2$ также не должно превышать 1, поэтому построенное решение нефизично при $a > 2$.

В этом случае нижний поршень просто лежит на дне сосуда, так как жёсткости пружин не хватает, чтобы удержать его на весу. Уравнение (35) теперь не выполняется, вместо него следует положить $x_2 = L$ (или $\alpha_2 = 1$). Вместо системы уравнений (36) имеем теперь

$$3a = \frac{pS}{kL}(1 - \alpha_1), \qquad a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1.$$

В ней снова можно выразить pS/kL из второго уравнения, подставить в первое и решить получившееся квадратное уравнение $3a = (a - \alpha_1)(1 - \alpha_1)$ относительно α_1:

$$\alpha_1^2 - (a+1)\alpha_1 - 2a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a+1)^2 + 8a}}{2}.$$

Решение «с плюсом» снова следует отбросить, поскольку оно заведомо больше единицы. Верхний поршень при этом будет находиться над дном на расстоянии $L - L\alpha_1$.

Ответ: Если $mg/(kL) \leq 2$, верхний поршень не сдвигается, а нижний опускается на $mg/(2k)$. Если $mg/(kL) > 2$, нижний нижний поршень лежит на дне, а верхний располагается на высоте $L(\sqrt{a^2 + 10a + 1} + 1 - a)/2$, где $a = mg/(kL)$.

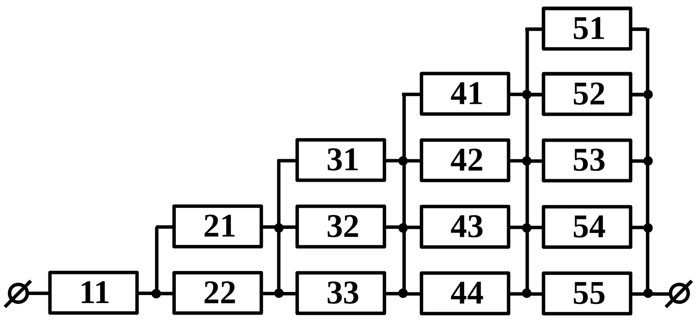

Рис. 6:

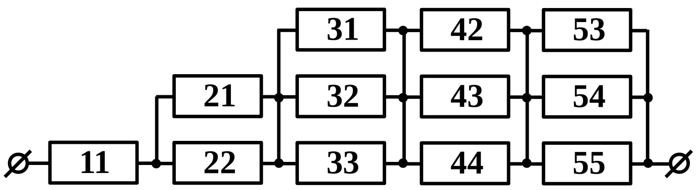

Рис. 7:

Задача 5.

Электрическая схема состоит из 5 "блоков", подключенных последовательно друг к другу. В каждом "блоке" резисторы подсоединены параллельно. Занумеруем сопротивления так, как показано на Рис. 6. Первый индекс нумерует номера "блока", второй – номер резистора в "блоке". Обозначим сопротивление каждого резистора через R.

Прежде чем приступить к детальному анализу данной электрической схемы, сделаем несколько общих замечаний:

1. Сопротивления внутри одного "блока" полностью эквиваленты, поэтому порядок, в котором они исключаются из схемы не имеет значения. Для определенности, будем считать, что всегда "выкусывается" самый верхний резистор в "блоке".

2. При "выкусывании" резистора из блока, в котором было m сопротивлений, сопротивление данного блока увеличивается: $R/m \to R/(m-1)$. В результате, общее сопротивление схемы также увеличивается: $\tilde{R} + R/m \to \tilde{R} + R/(m-1)$, где $\tilde{R}$ — сопротивление остальной части схемы. Следовательно, по закону Ома, полный ток в цепи уменьшается:

$$\frac{U_0}{\tilde{R} + R/m} \to \frac{U_0}{\tilde{R} + R/(m-1)}.$$

   При параллельном соединении одинаковых сопротивлений ток делится между ними поровну. Таким образом, во всех "блоках" кроме того, в котором был исключен резистор, ток на отдельных сопротивлениях в результате уменьшится. Например, в блоке с n резисторами изменение тока на отдельном сопротивлении равно:

$$\Delta I_n = \frac{U_0}{n\left(\tilde{R} + R/(m-1)\right)} - \frac{U_0}{n\left(\tilde{R} + R/m\right)} < 0.$$

   Следовательно падение напряжения на таких резисторах уменьшается. Напротив, в блоке, из которого был "выкушен" резистор, падение напряжения на оставшихся резисторах увеличивается. Действительно, для изменения тока на отдельном резисторе в этом блоке имеем

$$\Delta I_m = \frac{U_0}{(m-1)\left(\tilde{R} + R/(m-1)\right)} - \frac{U_0}{m\left(\tilde{R} + R/m\right)} > 0.$$

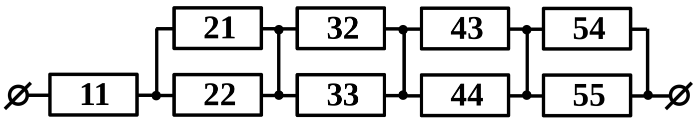

Рис. 8:

Подытожим, сформулировав следующее замечание. При исключении резисторов из других "блоков" ситуация в данном "блоке" может только улучшиться в том смысле, что падение напряжения на отдельном резисторе при этом уменьшается и может стать меньше $U_0/7$, если изначально оно было больше. Отметим также, что если Бендер может в данный момент "выкусить" некоторый резистор, то он сможет сделать это в любой момент. Действительно, оставив данный резистор нетронутым и "выкусив" резистор из другого "блока", он может только уменьшить падение напряжения на этом резисторе. Таким образом, порядок "выкусывания" резисторов не влияет на конечный результат.

3. В "блоке" с большим количеством резисторов падение напряжения на отдельном резисторе меньше, чем в "блоке" с меньшим количеством резисторов. Данное простое утверждение позволяет сделать следующий вывод. Предположим, что схема в данный момент имеет такой вид, что Бендер может забрать себе резистор из "блока" с m сопротивлениями, оставив в нем $m-1$ сопротивление. Тогда, если в схеме есть другой "блок", в котором в данный момент $n \geqslant m$ сопротивлений, то он может забрать из этого "блока" $n-m+1$ резистор, также оставив $m-1$ сопротивление. Действительно, забирая сопротивления из большего "блока", он увеличивает падение напряжения на отдельных резисторах в нем, но оно все равно будет оставаться меньше, чем падение напряжение в "блоке" с m сопротивлениями.

Сделав данные общие замечания, мы готовы перейти к детальному анализу. Рассчитаем общее сопротивление первоначальной схемы (см. Рис. 6):

$$R^0_{\text{tot}} = \frac{R}{1} + \frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \frac{R}{4} + \frac{R}{5} = \frac{137}{60}R.$$

Падения напряжения на отдельных резисторах в первом, втором и т.д. "блоках" равны соответственно

$$U_1 = \frac{60U_0}{137} > \frac{U_0}{7}, \quad U_2 = \frac{30U_0}{137} > \frac{U_0}{7}, \quad U_3 = \frac{20U_0}{137} > \frac{U_0}{7}, \quad U_4 = \frac{15U_0}{137} < \frac{U_0}{7}, \quad U_5 = \frac{12U_0}{137} < \frac{U_0}{7}. \tag{37}$$

Из (37) видно, что в начальный момент Бендер может забрать себе сопротивление из четвертого или пятого "блоков". Используя приведенные выше замечания, заключаем, что он может сразу выкусить сопротивления R_{41}, R_{51} и R_{52}. В результате у него получится схема, изображенная на Рис. 7. Проверим, может ли Бендер забрать себе еще какие-либо резисторы. Общее сопротивление новой схемы равно

$$R^1_{\text{tot}} = \frac{R}{1} + \frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{5}{2}R.$$

Новые падения напряжения на отдельных резисторах в первом, втором и т.д. "блоках" равны соответственно

$$U_1 = \frac{2U_0}{5} > \frac{U_0}{7}, \quad U_2 = \frac{U_0}{5} > \frac{U_0}{7}, \quad U_3 = U_4 = U_5 = \frac{2U_0}{15} < \frac{U_0}{7}. \tag{38}$$

Следовательно, Бендер может забрать себе резисторы R_{31}, R_{42} и R_{53}. Вновь исследуем получившуюся схему (см. Рис. 8). Общее сопротивление этой схемы равно

$$R^1_{\text{tot}} = \frac{R}{1} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = 3R.$$

Падения напряжения на отдельных резисторах:

$$U_1 = \frac{U_0}{3} > \frac{U_0}{7}, \quad U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = \frac{U_0}{6} > \frac{U_0}{7}. \tag{39}$$

Таким образом, Бендер не может забрать себе больше, чем 6 золотых резисторов так, чтобы не сработала сигнализация. Рис. 8 представляет конечную схему.

Ответ: Бендер может максимально украсть 6 золотых резисторов. Конечная схема изображена на Рис. 8.

Еще один способ рассуждений, приводящий к правильному ответу: Легко показать, что в схеме после выкусывания резисторов не может появиться новый "блок" (помимо первого) с одним сопротивлением. Действительно, предположим обратное. Рассмотрим процесс выкусывания резистора, в результате которого такой второй "блок" с всего одним резистором появляется. Перед выкусыванием цепь представляет собой схему, в которой есть один "блок" с одним резистором (сопротивление R), один блок с двумя резисторами (сопротивление $R/2$), из которого и будет произведено "выкусывание", и три "блока", в которых два и более резисторов (сопротивления $R_3, R_4, R_5 \leqslant R/2$). Оценим напряжение на "выкусываемом" резисторе:

$$U = \frac{U_0}{2(R + R/2 + R_3 + R_4 + R_5)} R \geqslant \frac{U_0}{2(R + R/2 + R/2 + R/2 + R/2)} R = \frac{U_0}{6} > \frac{U_0}{7}.$$

Противоречие. Такой резистор "выкусывать" нельзя. Для полного ответа на вопрос задачи остается показать, что можно "выкусить" все сопротивления и получить схему, изображенную на Рис. 8.

Городская открытая олимпиада школьников по физике 2016/17 г.
Теоретический тур
10 класса

Указано максимальное число баллов за пункт решения. Проверяющие могут оценить пункт меньшим числом баллов, если он выполнен с ошибкой или не полностью. В случае, если в работе присутствует альтернативное решение, оно должно быть оценено исходя их полного числа баллов при условии, что является верным. Должны быть оценены все правильные идеи, высказанные участником.

Задача 1 (всего 10 баллов)

A	Найдена связь между углами вылета мяча и стержня: α *и* $\beta=\pi/2-\alpha$	**3 балла**
B	Определены начальная скорость и угол вылета мяча	**2 балла**
C	Определена минимальная длина стержня	**2 балла**
D	Найдено время задержки между двумя бросками	**1 балл**
E	Определены возможные угловые скорости вращения стержня	**2 балла**

Задача 2 (всего 10 баллов)

A	Сказано (или отмечено на рисунке), что сила в шарнире B может иметь произвольное направление	**1 балл**
B	Выписаны условия равновесия сил, действующих на цилиндр и стержень	**4 балла**
C	Выписаны условия равновесия моментов сил, действующих на цилиндр и стержень	**2 балла**
D	Решена система полученных уравнений, т. е. найдены компоненты силы реакции в шарнире B	**2 балл**
E	Получено неравенство, определяющее возможные значения коэффициента трения	**1 балл**

Задача 3 (всего 12 баллов)

A	Показано, что угловая скорость цилиндра сразу после удара равна нулю	**1 балл**
B	Выписан второй закон Ньютона для цилиндра в проекции на вертикальную ось	**1 балл**
C	Выписано уравнение динамики вращательного движения цилиндра	**2 балла**
D	Получено выражение для углового ускорения цилиндра в первый момент после удара	**1 балл**
E	Определен знак углового ускорения и направление вращения	**1 балл**
F	Выписано выражение для кинетической энергии цилиндра	**1 балл**
G	Выписано выражение для полной энергии пули	**2 балла**
H	Произведен переход от скорости оси цилиндра к скорости центра масс системы	**2 балла**
I	Найдено выделившееся тепло	**1 балл**

Задача 4 (всего 10 баллов)

A	Найдено соотношение между давлениями газа «под» и «над» нижним поршнем до открытия сквозного отверстия О	**1 балл**
B	Выписано условие постоянства количества вещества («до» и «после» открытия)	**1 балл**
C	Выписаны условия равновесия поршней после открытия отверстия О	**2 балла**
D	Определены конечные положения поршней в случае, когда нижний поршень не лежит на дне сосуда	**3 балла**
E	Выписано условие того, что нижний поршень оказался на дне сосуда	**1 балл**
F	Определено конечное положение верхнего поршня в случае, когда нижний поршень лежит на дне сосуда	**2 балла**

Задача 5 (всего 10 баллов)

A	Нарисована конечная электрическая схема (убрано 6 резисторов)	**1 балл**
B	Продемонстрировано, как можно получить конечную схему, убирая последовательно 6 резисторов	**1 балл х6 = 6 баллов**
C	Доказано, что невозможно получить другую конечную схему с меньшим количеством сопротивлений независимо от порядка «выкусывания» резисторов	**3 балла**