2016. 10 класс

Задача 1.

Повернем рисунок из условия задачи на 90° против часовой стрелки и введем обозначения, показанные на Рис. 1. По условию задачи $AB \parallel CC'$, при этом $AB \perp BB'$. Для удобства

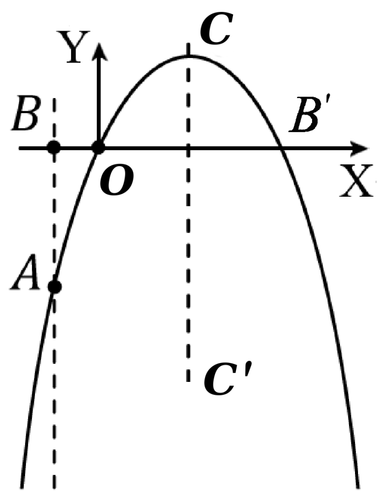

Рис. 1:

введем декартову систему координат, поместив начало отсчета в точку первой встречи тел A и B, ось OX направим вдоль траектории движения B. Отсчет времени начнем с момента первой встречи. Из условия задачи понятно, что тело A движется равномерно вдоль оси OX со скоростью v. На это движение накладывается движение вдоль оси OY с переменной скоростью. Из формы траектории (парабола, $y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$) и линейной зависимости $x(t) = vt$, понятно, что зависимость y от времени тоже квадратичная. Такая зависимость характерна для равноускоренного движения. Так движется тело в однородном поле тяжести, брошенное под углом к горизонту. Запишем уравнение движения тела A в привычном виде:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + vt, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Нам неизвестны x_0, y_0, v_{0y}, a_y. Посмотрим, что можно узнать из условия задачи. По выбору системы отсчета $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Понятно, что расстояние S между телами A и B в момент, когда их относительная скорость равна нулю — это максимальная высота “подъема”, а T — время “полета”. Известно, что:

$$\begin{cases} \dfrac{T}{2} = \dfrac{v_{0y}}{|a_y|}, \\ S = \dfrac{v_{0y}^2}{2|a_y|}. \end{cases} \tag{2}$$

Найдем a_y, решая линейную систему уравнений и учитывая направление выбранной оси OY:

$$a_y = -\frac{8S}{T^2} \tag{3}$$

Итак, ускорение тела A постоянно, направлено справа налево (по картинке из условия задачи) и равно по модулю $8S/T^2$.

У задачи есть и альтернативное решение, без использования аналогии с грузом, брошенным под углом к горизонту. Используем построенную систему координат и запишем уравнение траектории движения тела A:

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \tag{4}$$

Найдем α, β, γ из условия задачи. Мы знаем координаты трех точек параболы: $(0; 0)$, $(vT/2; S)$ и $(vT; 0)$. Этого достаточно для нахождения трех неизвестных.

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{4S}{v^2T^2}, \\ \beta = \dfrac{4S}{vT}, \\ \gamma = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Вдоль оси OX, как мы уже говорили, движение тела A равномерное, следовательно, ускорение $a_x = 0$. Найдем ускорение тела A вдоль оси OY. Для этого сначала определим скорость вдоль этой оси. По определению, мгновенная скорость точки есть предел, к которому стремится средняя скорость, рассчитанная за очень малый интервал времени. Рассмотрим малый интервал времени Δt. За это время координата x тела A получит малое приращение Δx, а координата y — малое приращение Δy. Следовательно через интервал времени Δt уравнение траектории (4) приобретет вид

$$y + \Delta y = \alpha(x + \Delta x)^2 + \beta(x + \Delta x) + \gamma = \alpha(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + \beta(x + \Delta x) + \gamma \tag{6}$$

Поскольку все приращения малые, слагаемым, которое содержит $(\Delta x)^2$ можно пренебречь, оно, как говорят, имеет второй порядок малости и в силу этого не дает вклада в мгновенную скорость точки. Почленно вычитая уравнения (6) и (4), рассчитаем теперь скорость вдоль оси OY:

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{[\alpha(x^2 + 2x\Delta x) + \beta(x + \Delta x) + \gamma] - [\alpha x^2 + \beta x + \gamma]}{\Delta t} = 2\alpha x v + \beta v, \tag{7}$$

где было использовано, что $\Delta x/\Delta t = v$ есть скорость движения тела A вдоль оси OX. Применим к полученному соотношению (7) еще раз тот же самый прием. Через малый интервал времени Δt скорость точки A вдоль оси OY получит малое приращение Δv_y и соотношение (7) приобретет вид:

$$v_y + \Delta v_y = 2\alpha(x + \Delta x)v + \beta v, \tag{8}$$

Вычислим ускорение:

$$a_y = \frac{[2\alpha(x + \Delta x)v + \beta v] - [2\alpha(x + \Delta x)v + \beta v]}{\Delta t} = 2\alpha v^2 = -\frac{8S}{T^2}. \tag{9}$$

Второй способ решения задачи более универсален, но его применение усложняется математическими расчетами. Первый способ в данной конкретной задаче — проще и изящнее.

Ответ: Ускорение тела A в момент, когда относительная скорость тел A и B равна нулю, и в момент их второй встречи одинаково, равно по модулю $8S/T^2$ и направлено параллельно оси параболы справа налево.

Примечание: Ускорение можно найти еще следующим образом (здесь вновь используется тот факт, что движение по оси OY равноускоренное). Подставляя в (4) выражение $x = vt$ и сравнивая со вторым уравнением в (1), получаем, что $a_y/2 = \alpha v^2$.

Задача 2.

Рассмотрим целиком систему "тележка-пружина-грузик". Закон сохранения механической энергии с учетом связи "нить-блок" позволяет решить задачу без записи динамического уравнения. Энергия системы складывается из кинетической энергии грузика, кинетической энергии тележки, их потенциальной энергии в поле тяжести и энергии, запасенной в пружине. Изменение этой энергии равно работе внешних сил, при этом ненулевую работу совершают только две силы: горизонтальная компонента силы, действующей со стороны нити на блок, и сила, действующая со стороны нити на грузик. Так как нить невесомая, эти силы совпадают по модулю, и, с учетом равенства смещений грузика по вертикали и тележки по горизонтали (считаем пока, что нить натянута), их работы тоже равны по модулю. Однако первая сила совершает положительную работу, а вторая — отрицательную, что означает, что работа внешних сил равна нулю. Можно записать:

$$\frac{kl^2}{2} + mg|\Delta h| = \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \tag{10}$$

где x — величина деформации пружины, Δh — смещение грузика по вертикали, u — вертикальная проекция скорости грузика, v — скорость тележки. Очевидно, что пока нить натянута, $v = u$ — скорость смещения грузика вниз равна скорости смещения тележки влево. Тогда выражение (10) перепишется в виде:

$$\frac{kl^2}{2} + mg\Delta h = \frac{(M+2m)v^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \tag{11}$$

В момент, когда сила натяжения нити обратится в нуль, для грузика будет верным равенство: $mg = kx$, смещение тележки влево от первоначального положения в этот момент $L_0 = l + mg/k$ (конечно, этого может и не произойти, если по условию задачи $L < l + mg/k$). Воздействие грузика на горизонтальное движение тележки прекращается, грузик продолжает колебаться около положения равновесия, а тележка продолжает двигаться по инерции с постоянной скоростью до столкновения со стеной. Итак, для того, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо рассмотреть два случая: 1) $L \le l + mg/k$; 2) $L > l + mg/k$.

1) В первом случае нить во время движения тележки до стены натянута, в момент столкновения со стеной смещение грузика по вертикали $\Delta h = -L$, сжатие пружины $x = l - L$ (если $l > L$, то пружина растянута, если $l < L$ - сжата). Учтем это в выражении (11) и получим уравнение для v, которое легко решается:

$$v = \sqrt{\frac{2klL - kL^2 + 2mgL}{M+2m}}. \tag{12}$$

Заметим, что величина под корнем положительна.

2) Во втором случае рассчитаем скорость движения тележки в момент, когда ее смещение влево равно $L_0 = l + mg/k$. При этом вертикальное смещение грузика относительно первоначального положения $\Delta h = -(l + mg/k)$, сжатие пружины $x = mg/k$. Подставим это в выражение (11) и получим:

$$v = \sqrt{\frac{kl^2 + 2mgl + m^2g^2/k}{M+2m}} = \left(l + \frac{mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{M+2m}}. \tag{13}$$

Легко проверить, что при $L = l + mg/k$ расчет скорости тележки по выражениям (12) и (13) дает одинаковый результат.

Ответ: Если $L \le l + mg/k$, то скорость удара тележки о стенку дается выражением (12), а если $L > l + mg/k$, то искомая скорость задается равенством (13).

Задача 3.

Найдем условие равновесия системы для случая, когда грузы имеют произвольные массы (m_1, m_2 и m_3). Для этого рассмотрим по отдельности четыре тела: стержень AB, стержень BC, шарнир B и ползунок с шарниром C. Шарнир B будет рассматриваться отдельно от стержней, хотя при решении задачи его можно считать частью одного из них (это бы упростило ход решения, но нарушило бы "симметрию" между стержнями).

Сначала определим, какие силы действуют на стержень AB. Со стороны шарнира A действует сила реакции, направление которой неизвестно. Представим ее в виде двух компонент $\vec{N}_{1x}$ и $\vec{N}_{1y}$ (см. Рис. 2). Направления этих компонент выбраны произвольно (соответствующие проекции на эти направления могут иметь любой знак). Аналогично изобразим силу со стороны шарнира B ($\vec{R}_1 = \vec{R}_{1x} + \vec{R}_{1y}$). Кроме того, на стержень AB действует сила со стороны нити $\vec{T}_1$. Условия того, что силы, действующие на стержень AB, скомпенсированы выписывать не будем, т. к. они содержат неизвестную силу $\vec{N}_1$, находить которую не требуется и которая не войдет ни в одно из последующих уравнений. Запишем лишь условие моментов сил относительно оси, проходящей через точку A:

$$\frac{1}{2}T_1 \cos 30^\circ + R_{1x} \sin 30^\circ = R_{1y} \cos 30^\circ. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим стержень BC. Силы, действующие на этот стержень со стороны нити и шарниров B и C, указаны на Рис. 3. Условия равновесия имеют вид

$$N_{3x} = R_{3x}, \tag{15}$$
$$N_{3y} = R_{3y} + T_3, \tag{16}$$
$$\frac{1}{2}T_3 \sin 30^\circ + R_{3y} \sin 30^\circ = R_{3x} \cos 30^\circ. \tag{17}$$

По третьему закону Ньютона на шарнир B со стороны стержней будут действовать силы $-\vec{R}_1$ и $-\vec{R}_3$, а также сила со стороны нити $\vec{T}_2$ (см. Рис. 4). Шарнир будет находиться в равновесии, если выполнены условия

$$R_{1x} = R_{3x}, \tag{18}$$
$$R_{3y} = R_{1y} + T_2. \tag{19}$$

Остается записать условия равновесия ползунка и шарнира C (см. Рис. 5). Имеем следующее (N — сила реакции на ползунок со стороны рельса, $F_{\text{тр}}$ — сила трения):

$$N_{3x} = F_{\text{тр}}, \tag{20}$$
$$N_{3y} = N, \tag{21}$$
$$|F_{\text{тр}}| \leq \mu |N|. \tag{22}$$

Поскольку очевидно, что $T_i = m_i g$ ($i = 1, 2, 3$), мы считаем эти три силы известными.

Теперь необходимо решить систему уравнений (14)–(21) относительно N и $F_{\text{тр}}$ и обратиться к условию (22). Выразим все силы через N и $F_{\text{тр}}$:

$$R_{1x} = R_{3x} = N_{3x} = F_{\text{тр}}, \tag{23}$$
$$R_{1y} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}F_{\text{тр}}, \tag{24}$$
$$N_{3y} = N, \tag{25}$$
$$R_{3y} = N - T_3. \tag{26}$$

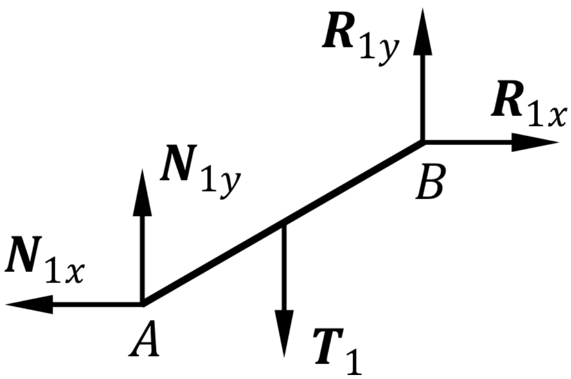

Рис. 2:

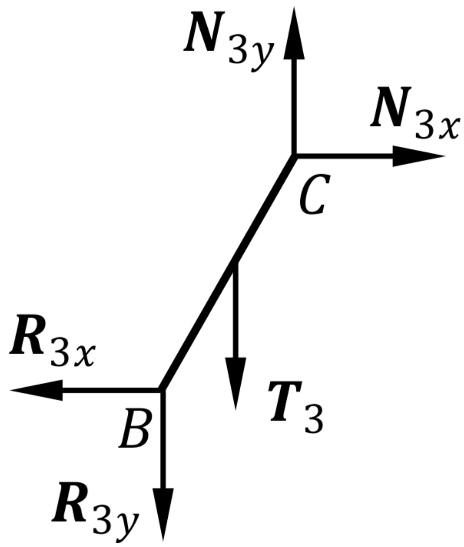

Рис. 3:

Подставляя эти уравнения в (17) и (19), получаем следующее:

$$N = \frac{1}{4}\Big(3T_1 + 6T_2 + 5T_3\Big), \tag{27}$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(T_1 + 2T_2 + T_3\Big). \tag{28}$$

Условие (22) в терминах масс m_1, m_2 и m_3 примет вид:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{3}(m_1 + 2m_2 + m_3)}{3m_1 + 6m_2 + 5m_3}. \tag{29}$$

В исходном состоянии ($m_1 = m_2 = m_3$) система находится в равновесии. Это означает, что коэффициент трения подчиняется условию:

$$\mu \geq \frac{4\sqrt{3}}{14} = \frac{2\sqrt{3}}{7} \approx 0,49. \tag{30}$$

В случае а) ($m_1 = 0$, $m_2 = m_3$) имеем условие

$$\mu \geq \frac{3\sqrt{3}}{11} \approx 0,47, \tag{31}$$

которое выполняется автоматически, т. е. в случае а) система останется в равновесии. В случае б) ($m_2 = 0$, $m_1 = m_3$) условие

$$\mu \geq \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,43 \tag{32}$$

также выполняется, что означает, что система останется в равновесии и в этом случае. В случае в) ($m_3 = 0$, $m_1 = m_2$) имеем:

$$\mu \geq \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58. \tag{33}$$

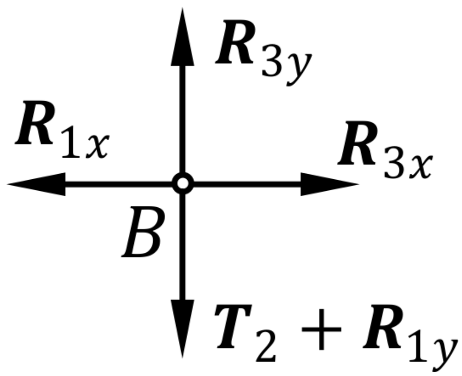

Рис. 4:

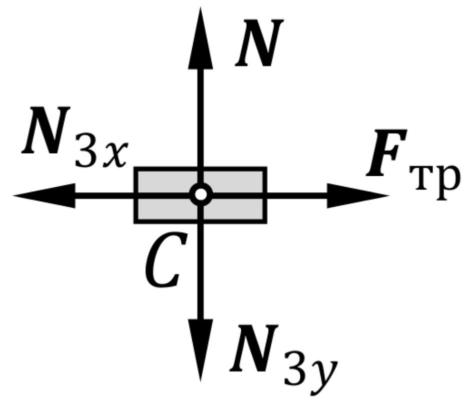

Рис. 5:

Таким образом, система может выйти из равновесия, если коэффициент трения не превосходит $\sqrt{3}/3$. Заметим, что без использования калькулятора представленные выше значения можно легко сравнить, возведя их в квадрат.

<u>Ответ:</u> а) система останется в равновесии, б) система останется в равновесии, в) система останется в равновесии лишь при условии $\mu \geq \sqrt{3}/3 \approx 0,58$.

Задача 4.

Обозначим сопротивления проволок, из которых составлена схема так, как это показано на Рис. 6: $R_{AB} = R_{AD} = a_0$, $R_{BCD} = b_0$, $R_{BB_1} = R_{DD_1} = a_1$, $R_{B_1C_1D_1} = b_1$, $\ldots$. При этом очевидно, что при $k \geq 0$ выполняются следующие соотношения

$$a_k = a_0 2^{k-1}, \qquad b_k = 2 \cdot 2 \cdot a_k = a_0 2^{k+1}. \tag{34}$$

Нарисуем для наглядности эквивалентные схемы для случаев одного, двух и трех квадратов (см. Рис. 7). Используя эквивалентную схему для одного квадрата, получаем, что

$$R_0 = \frac{(a_0 + b_0)a_0}{a_0 + b_0 + a_0} = \frac{3}{4}a_0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{4}{3}R_0. \tag{35}$$

Сопротивление участков, выделенных на Рис. 7 пунктирной рамкой удобно вычислять, составив рекуррентные соотношения. Предположим, что схема состоит из $n+1$ квадрата. Тогда рекуррентная последовательность будет включать n членов. Первый член последовательности имеет вид

$$S_1^n = 2a_n + b_n. \tag{36}$$

Последующие $n-1$ членов можно найти, используя соотношение (см. Рис. 8)

$$S_{k+1}^n = 2a_{n-k} + \frac{b_{n-k}S_k^n}{b_{n-k} + S_k^n}. \tag{37}$$

Искомое сопротивление участка схемы в пунктирной рамке: S_n^n.

Подставим в рекуррентное соотношение (37) уравнения (34):

$$S_{k+1}^n = a_0 2^{n-k} + \frac{a_0 2^{n-k+1} S_k^n}{a_0 2^{n-k+1} + S_k^n}. \tag{38}$$

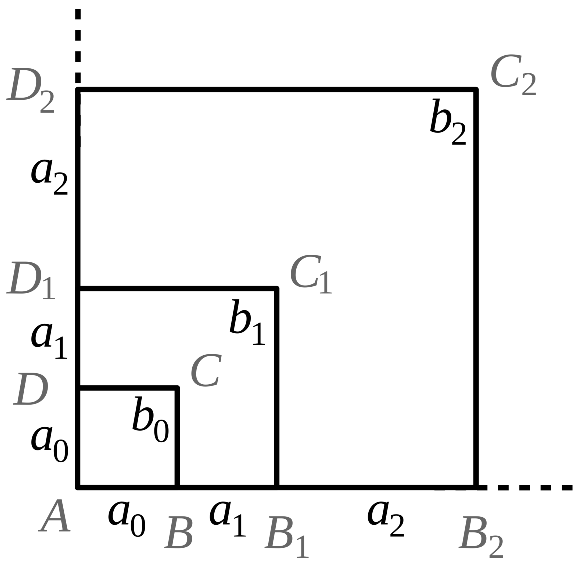

Рис. 6:

Сделаем в уравнении (38) замену переменных:

$$S_k^n = a_0 2^{n-k+1} p_k^n. \tag{39}$$

В результате имеем:

$$p_{k+1}^n = 1 + \frac{2p_k^n}{1 + p_k^n}. \tag{40}$$

При этом для первого члена p-последовательности из (36) и (39) получаем, что

$$S_1^n = a_0 2^n p_1^n = 3a_0 2^n \quad \Leftrightarrow \quad p_1^n = 3. \tag{41}$$

Отметим, что p-последовательность, определяемая уравнениями (40) и (41), вообще не зависит от n. Значение параметра p_k^n (в отличие от величины S_k^n) зависит только от номера k и не зависит от общего числа членов последовательности n. В связи с этим, индекс n можно опустить.

Теперь легко дать ответ на первый вопрос задачи. Случаю пяти квадратов в наших обозначениях соответствует $n = 4$, и нам необходимо рассчитать S_4^4. Для p-последовательности из (40) и (41) имеем

$$p_1 = 3, \quad p_2 = \frac{5}{2}, \quad p_3 = \frac{17}{7}, \quad p_4 = \frac{29}{12}. \tag{42}$$

Таким образом,

$$S_4^4 = \frac{29}{6} a_0, \tag{43}$$

и для сопротивления между точками A и B в случае схемы из пяти квадратов получаем (см. Рис. 8)

$$R_5 = \frac{99}{140} a_0 = \frac{33}{35} R_0. \tag{44}$$

Остается дать ответ на второй вопрос задачи. Для этого необходимо определить, чему равно значение величины $S_n^n = 2a_0 p_n$ при больших значениях n. Рассмотрим еще раз p-последовательности и исследуем ее предельное поведение.

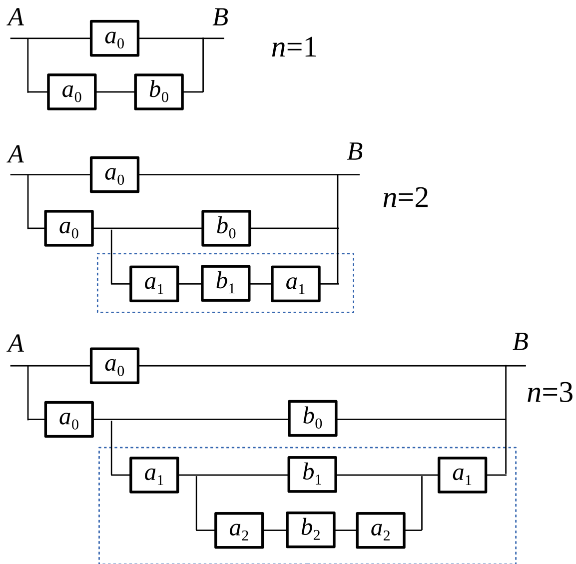

Рис. 7:

Докажем, что данная последовательность имеет предел. Сперва по индукции покажем, что последовательность величин p_n ограничена снизу числом $1+\sqrt{2}$. Действительно,

$$p_0 = 3 > 1+\sqrt{2}, \qquad p_1 = 5/2 > 1+\sqrt{2}.$$

Предположим, что $p_k > 1+\sqrt{2}$. Тогда,

$$p_{k+1} = 1 + 2p_k/(1+p_k) = 3 - 2/(1+p_k) > 3 - 2/(2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}.$$

Покажем теперь, что последовательность величин p_k монотонно убывает:

$$p_{k+1} - p_k = -\frac{(p_k - 1 - \sqrt{2})(p_k - 1 + \sqrt{2})}{1+p_k} < 0.$$

Существует теорема о том, что ограниченная монотонная последовательность имеет предел. Что и требовалось доказать. В принципе, в существовании предела можно легко убедиться, непосредственно вычисляя члены последовательности.

Найдем теперь предел p_∞ данной последовательности. Для этого перейдем в рекуррентном соотношении (40) к пределу:

$$p_\infty = 1 + \frac{2p_\infty}{1+p_\infty}. \tag{45}$$

Откуда

$$p_\infty = 1+\sqrt{2}. \tag{46}$$

Таким образом,

$$S_\infty^\infty = 2a_0(1+\sqrt{2}), \tag{47}$$

и для сопротивления между точками A и B в случае схемы, состоящей из очень большого количества квадратов, получаем (см. Рис. 8)

$$R_\infty = \frac{a_0}{\sqrt{2}} = \frac{4R_0}{3\sqrt{2}}. \tag{48}$$

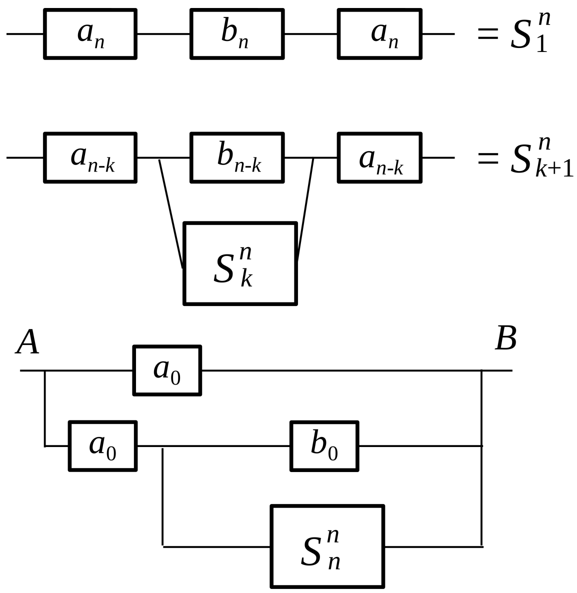

Рис. 8:

Ответ: Сопротивление между точками A и B для схемы с пятью квадратами равно $R_5 = 33R_0/35$. Сопротивление между точками A и B для схемы, состоящей из очень большого количества квадратов, равно $R_\infty = 4R_0/3\sqrt{2}$.

Примечание: Доказательство существования предела рекуррентной последовательности не является необходимым для получения полного балла по данной задаче.

Задача 5. Введём ось, направленную вправо и совпадающую с главной оптической осью линзы; начало отсчёта – центр линзы.

Пусть из-за движения поршня лампочка удалилась от фокуса линзы влево, так что расстояние от лампочки до линзы $a > F$. Тогда изображение лампочки в линзе будет действительным и будет находится правее линзы в точке с координатой $b > 0$. Величину b легко определим с помощью формулы линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \qquad \Leftarrow \qquad b = \frac{Fa}{a-F}. \tag{49}$$

При приближении a к F знаменатель этой формулы становится малым, величина b увеличивается. При стремлении a к F изображение "уходит" вправо на бесконечность. Множество точек изображения на введённой оси в этом случае $M \in [b_1, +\infty)$, где b_1 соответствует изображению крайнего левого положения лампочки a_l, т.е. случаю, когда объём газа *минимален* (см. рис. 9).

Если же лампочка приблизится к линзе ближе, чем на F (т.е. при $a < F$), в ф-ле (49) величина b станет отрицательной. Это значит, что в данном случае изображение лампочки станет мнимым и расположится с другой стороны от линзы (левее неё) на расстоянии $|b|$ от начала отсчёта. По-прежнему приближение a к F ведёт к уходу изображения на бесконечность, правда, теперь на бесконечность влево от линзы. Множество точек изображения в этом случае $M \in (-\infty, b_2]$, где $b_2 < 0$ соответствует изображению крайнего правого положению лампочки a_r, т.е. случаю, когда объём газа *максимален.*

Итак, чтобы ответить на вопрос задачи, следует найти a_l и a_r, т.е. определить, на какое максимальное расстояние от начального положения сдвигается влево и вправо поршень в

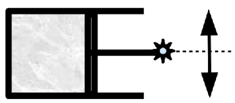

Рис. 9:

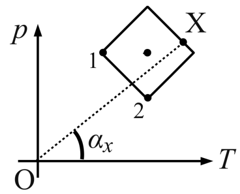

Рис. 10:

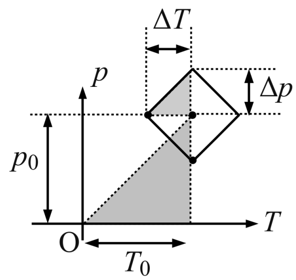

Рис. 11:

описанном процессе. Для этого найдем, в каких точках процесса $p(T)$ объём газа максимален и минимален.

Обозначим начальные давление, температуру и объёма газа через p_0, T_0, V_o соответственно, а количество вещества газа под поршнем – через ν. Пусть площадь поршня равна S.

Из уравнения Клапейрона-Менделеева объём газа $V = \nu RT/p$, т.е. пропорционален величине T/p. В любой точке X процесса значение T/p совпадает с котангенсом угла α_x линии OX, проведённой из X в начало координат (см. рис. 10). Понятно, что наибольший наклон (и наименьший котангенс) будет в точке 1, а наименьший наклон – в точке 2. Давление и температура в этих точках равны

$$p_1 = p_0, \qquad p_2 = p_0 - \Delta p, \qquad T_1 = T_0 - \Delta T, \qquad T_2 = T_0.$$

Здесь мы ввели величины Δp и ΔT (см. рис. 11), которые легко найти из подобия выделенных на рисунке треугольников:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{k}.$$

Найдём минимальный объём газа V_1 и его максимальный объём V_2, а также вычислим, каков в точках 1 и 2 сдвиг поршня из начального положения (ΔL_l и ΔL_r):

$$V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1} = \frac{\nu RT_0(1 - \Delta T/T_0)}{p_0} = V_0(1 - k^{-1}), \qquad \Delta L_l = \frac{V_0 - V_1}{S} = \frac{V_0}{Sk} = \frac{L}{k}.$$

$$V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_2} = \frac{\nu RT_0}{p_0(1 - \Delta p/p_0)} = \frac{V_0}{1 - k^{-1}}, \qquad \Delta L_r = \frac{V_2 - V_0}{S} = \frac{V_0}{S(k-1)} = \frac{L}{k-1}.$$

Крайние положения лампочки a_l и a_r при этом будут

$$a_l = F + \Delta L_l = F + \frac{L}{k}, \qquad a_r = F - \Delta L_r = F - \frac{L}{k-1}.$$

Понятно, что лампочка не должна врезаться в линзу, т.е. $a_r > 0$, так что, должно быть, $F > \Delta L_r$.

Подставляя a_l в (49), получим b_1; подставляя туда же a_r, найдём b_2:

$$b_1 = \frac{Fa_l}{a_l - F} = \frac{F(kF + L)}{L}, \qquad b_2 = \frac{Fa_r}{a_l - F} = -\frac{F(F(k-1) - L)}{L}. \tag{50}$$

Ответ: $M \in (-\infty, b_2] \cup [b_1, +\infty)$, где b_1 и b_2 задаются ф-лой (50). Лампочка не разобъёт линзу только если $F(k-1) > L$, т.е. $b_2 < 0$.

См. решение второй задачи 11 класса.