ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР 2015. 8 класс. Разбалловка

Все задачи довыводной части (1-4 задачи) оцениваются из 3 баллов, все задачи выводной (5-7) - по 6 баллов. Все критерии независимы и суммируются. Могут встречаться решения, под критерии не подпадающие - например, нестандартные решения, решения, основанные на совершенно другой идее и т.д. В таких случаях, разумеется, их стоит оценивать исходя из каких-нибудь других соображений. Однако, полное решение ВСЕГДА даёт максимальный балл по задаче.

Задача 1.

Центр масс можно искать независимо по горизонтали и по вертикали - +1 балл.

Найден центр масс в одном из случаев - +1 балла.

Найден центр масс во втором случае – +1 балл

Задача 2.

Сила натяжения нити равняется разности силы Архимеда и силы тяжести +0.5 балла

Верно вычислена сила натяжения нити в начальный момент времени +0.5 балла

Определена сила натяжения нити в тот момент, когда куб имеет сторону $3a$ (и т.е. предъявлен верный ответ) +1 балл

Доказано, что при стороне куба $3a$ сила натяжения нити максимальная +1 балл

Задача 3.

Верно определена первая часть траектории лёгкого таракана – отрезок прямой - +1 балл.

Верно определена вторая часть траектории – часть окружности, с упоминанием того, что это именно часть окружности - +1 балл

Верно нарисована вся трактория (с доказательством) - +1 балл

Задача 4.

Жёсткость части жгута не равна жёсткости всего жгута; при этом либо выписана формула, либо верная зависимость сказана словами - +1 балл

Получено соотношение на длины частей жгута 4:7:10, либо найдена длина любой из частей жгута - +1 балла

Получен правильный ответ - 1 балл

Задача 5.

В начальный момент кубики будут либо одновременно всплывать, либо одновременно тонуть - +1 балл

В начальный момент кубики будут одновременно всплывать - +1 балл

Показано, что положение равновесия – с кубиком, пересекающим границу раздела - +1 балл

Идея о том, как вычислять силу со стороны жидкости на кубик, пересекающий границу раздела - +1 балл

Верное уравнение на положение кубиков (через любую неизвестную переменную) - +1 балл

Верный ответ - +1 балл

Задача 6.

Радиус диска прямо пропорционален высоте диска - +1 балл

Радиус диска линейно уменьшается со временем - +1 балл

Мощность пропорциональна изменению площади диска - +1 балл

Изменение площади диска пропорционально радиусу - +1 балл

Мощность пропорциональна радиусу - +1 балл

Верный линейный график - +1 балл

Задача 7.

Условием равновесия является равновесие всех трёх рычагов - +1 балл

Составлена система уравнений на рычаги - +2 балла

Верно написаны ограничения на переменные - +1 балл

Система разрешена и получен ответ - +2 балла

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР **2015. 8 класс.**

Задача 1.

Искать центр масс двумерного листа бумаги – дело непростое, поэтому мы будем отдельно искать его центр масс по горизонтали и по вертикали. Во-первых, очевидно, что у расправленного листа центр масс находится ровно посередине – это следует из симметрии.

Рассмотрим теперь лист бумаги после двух складываний (см. рис. 1). Цифры в клеточках показывают, сколько слоёв бумаги покрывают эту клеточку. Также заметим, что центр масс каждой клеточки находится в её середине. Легко видеть, что для нахождения центра масс листа по вертикали достаточно рассмотреть три грузика массами 2, 1 и 1 на расстоянии 1 друг от друга и найти их центр масс. Этот центр масс находится на каком-то расстоянии а от центрального грузика. Запишем уравнение равновесия: $2\cdot(1-a) = a\cdot 1 + (a+1)\cdot 1$. Отсюда $a = 0.25$, и центр масс находится на 0.25 клетки выше центрального грузика, т.е. сместился на 0.25 клетки вниз относительно начального положения. Осталось заметить, что лист симметричный относительно поворота, а значит для центра масс по горизонтали работают ровно те же рассуждения. Центр масс листа отмечен красной точкой на рисунке 2.

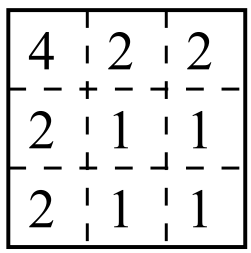

Рис. 1.

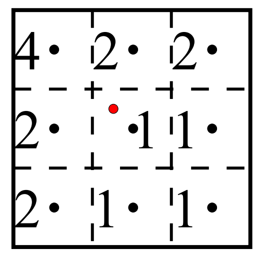

Рис. 2.

После четырёх складываний определение центра масс оказывается совсем простым; здесь остаётся только две клетки по вертикали, и центр масс расположен на расстоянии 0.25 клетки от центра верхней клетки вниз и 0.25 клетки от центра левой клетки вправо (см. рис. 4)

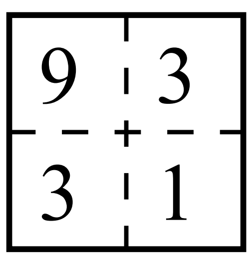

Рис. 3.

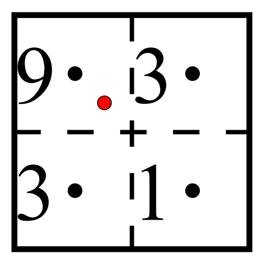

Рис. 4.

<u>Ответ:</u> Центры масс листа после двух и четырёх сгибов отмечены на рисунках 2 и 4.

Задача 2.

На куб, закреплённый за бортом подводной лодки, действуют три силы: сила Архимеда со стороны воды $F_a = \rho g V$, сила тяжести mg и сила со стороны нити. Куб находится в равновесии, а значит сумма этих сил равна нулю. Таким образом, искомую силу натяжения нити мы можем найти, вычитая из силы тяжести куба силу Архимеда. Стоит отметить, что эта разность может быть как положительной, так и отрицательной. Первый случай означает, что сила Архимеда меньше силы тяжести, и нить тянет куб наверх, удерживая его от того, чтобы утонуть. Во втором же случае сила Архимеда со стороны жидкости больше силы тяжести куба, то есть куб стремится всплыть, а нить удерживает его от этого, и сила со стороны нити действует вниз. Таким образом, нас интересует максимум модуля разности силы Архимеда и силы тяжести куба. Исследуем, как изменяется эта величина (обозначим её за F_d) по мере того, как моряки уменьшают куб.

Плотность ρ_1 больше плотности воды, а плотность ρ_2 – меньше. А значит, что F_d будет увеличиваться, когда моряки будут подпиливать слои куба плотностью ρ_2 и уменьшаться, когда они будут подпиливать слои плотностью ρ_1. Это также будет видно из выражения для F_d чуть далее.

Вычислим начальное значение величины F_d и натяжения нити:

$$F_d = a^3\rho_1 g + ((3a)^3 - a^3)\rho_2 g + ((5a)^3 - (3a)^3)\rho_1 g - (5a)^3\rho g$$

Первое слагаемое здесь соответствует массе внутреннего кубика, второе – массе средней части, третье – массе внешней части куба и вычитается сила Архимеда со стороны воды.

Для удобства перепишем выражение в таком виде:

$$F_d = a^3(\rho_1 - \rho)g + ((3a)^3 - a^3)(\rho_2 - \rho)g + ((5a)^3 - (3a)^3)(\rho_1 - \rho)g$$

Теперь его просто вычислить, а также становится совсем ясным вывод из второго абзаца.

$$F_d = ga^3\big[(\rho_1 - \rho) + 26(\rho_2 - \rho) + 98(\rho_1 - \rho)\big] = 10 \cdot 0.2^3 \cdot 50 \cdot (1 - 52 + 98) = 4 \cdot 47\ H$$

По мере того, как моряки будут уменьшать куб, значение F_d будет уменьшаться, как было отмечено, т.к. они подпиливают внешний куб, имеющий плотность ρ_1. Пока значение F_d будет оставаться положительным, оно в любом случае будет меньше уже найденного. Если же оно станет отрицательным, то с каждым следующим уменьшением кубика F_d будет расти по модулю. А значит, нас может интересовать лишь момент, когда сторона куба уменьшится до размера $3a$. (То есть локальный максимум функции $F_d(l)$, где l - длина стороны куба). Вычислим F_d в этот момент:

$$F_d = a^3(\rho_1 - \rho)g + ((3a)^3 - a^3)(\rho_2 - \rho)g$$
$$F_d = ga^3\big[(\rho_1 - \rho) + 26(\rho_2 - \rho)\big] = 10 \cdot 0.2^3 \cdot 50 \cdot (1 - 52) = -4 \cdot 51\ H$$

То есть сила натяжения нити, которая равняется модулю F_d, в этом случае будет больше и будет равняться 204 Н.

По аналогичным соображениям, дальше F_d будет увеличиваться, а нас не будут интересовать никакие промежуточные моменты, кроме того, когда куб сократится до стороны a. Но в этом случае легко увидеть, что сила натяжения нити будет уже слишком маленькой и равняться 4 Н.

Ответ: Максимальное натяжение нити, зафиксированное за время эксперимента, равняется 204 Н.

Задача 3.

Тяжёлый таракан всегда остаётся неподвижен относительно стола; это означает, что системы отсчёта тяжёлого таракана и стола совпадают. Рассмотрим отрезок времени, в который оба таракана ползут по первым рёбрам рамки. Переходя в систему отсчёта тяжёлого таракана, можно легко нарисовать траекторию лёгкого, которая будет являться отрезком прямой. Эта часть траектории отображена на рисунке 6

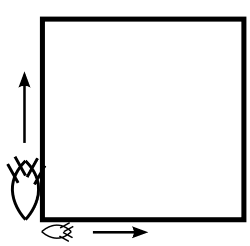

Рис. 5.

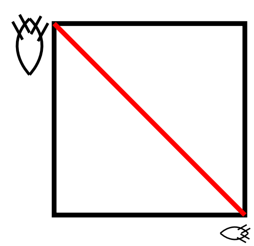

Рис. 6.

Теперь рассмотрим момент, когда тяжёлый таракан хочет повернуть на следующее ребро. Как следует из условия задачи, относительно стола он остаётся совершенно неподвижным, а значит, поворачивается при этом рамка. Лёгкий таракан при этом описывает траекторию, представляющую собой часть окружности (т.к. его расстояние до тяжёлого таракана остаётся неизменным). Момент поворота отображён на рисунке 7. Дальше они вновь ползут вдоль рёбер, и траектория вновь представляет собой отрезок прямой (см. рис. 8). После этого массивный таракан вновь поворачивает рамку, и ситуация становится аналогичной начальной, т.е. дальше лёгкий таракан продолжает двигаться по той же траектории.

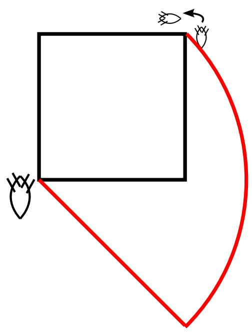

Рис. 7.

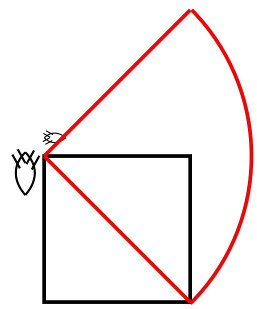

Рис. 8.

Ответ: Траектория лёгкого таракана изображена на рисунке 8.

Задача 4.

Сначала определим длину каждой из частей жгута в растянутом виде. Это можно сделать без составления системы уравнений. Действительно, к каждой из частей жгута будет подвешен груз массой 10 кг. Это значит, что сила натяжения каждой из частей будет равна 100 Н. А это значит, что их суммарное растяжение будет таким же, как если бы к целому жгуту подвесить груз массой 10 кг. То есть, общее растяжение трёх частей жгута будет равно $\Delta l = F/k = 2$ м.

Отсюда суммарная длина трёх частей жгута с подвешенными грузами будет равняться 7 м, и можно определить длину каждой из частей жгута:

$$x + (x+1) + (x+2) = 7 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ м}$$

Осталось определить начальную длину кусков жгута. Научимся сначала находить жёсткость частей жгута. Заметим: если жгут растягивать с силой F, его длина увеличится на δl согласно закону Гука $F = k\delta l$. Каждая из половин жгута при этом растянулась на $\frac{\delta l}{2}$. Значит, жёсткость половины жгута равняется $2k$. Аналогично, жёсткость отрезка жгута длины l_1 равняется $k_1 = \frac{L}{l_1}k$, где L – длина всего жгута.

Обозначим за y длину части жгута в растянутом виде, за l - его длину в нерастянутом, и напишем уравнение, связывающее y и l.

$$y = l + F/k = l + \frac{F}{k\frac{L}{l}} = l + \frac{Fl}{kL} = l(1 + \frac{F}{kL}) = l(1 + \frac{100}{50 \cdot 5}) = 1.4l$$

Таким образом, начальная длина каждой из частей жгута в 1.4 раза меньше их длин в растянутой версии.

Ответ: Барону нужно разрезать жгут на части длинами $x_1 = \frac{20}{21}$ м, $x_2 = \frac{5}{3}$ м, $x_3 = \frac{50}{21}$ м.

Задача 5.

Из конфигурации блоков видно, что оба кубика будут либо двигаться одновременно вниз, либо одновременно вверх. Вычислим плавучести кубиков в начальный момент. Силы тяжести, действующие на кубики, равны и составляют $F_{\text{Т}} = 68$ Н. Объёмы кубиков равны $V = 8 \cdot 10^{-3}$ м. Тогда сила Архимеда, действующая на верхний кубик, равняется

$$F_1 = \rho_k g V = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 800 = 64 \ H$$

А на нижний
$$F_2 = \rho_k g V = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 1000 = 80\ H$$
Тогда суммарная сила, действующая на оба кубика, равняется $F_1 + F_2 - 2F_{\text{т}} = 8$ Н и направлена вверх, т.е. кубики начнут одновременно всплывать.

Сразу можно отметить, что нижний кубик не всплывёт настолько, чтобы оказаться целиком в керосине. Действительно, в этом случае силы Архимеда, действующие на кубики, не превышали бы $F_1 = 64$ Н (сила Архимеда верхнего кубика может быть ещё меньше, если он торчит из воды), а силы тяжести равны тем же 68 Н, то есть это никак не могло бы быть положением равновесия.

Тогда положение равновесия будет выглядеть так, как показано на рисунке; нам необходимо определить неизвестную длину x. Её можно найти из уравнения баланса сил; Три из четырёх действующих на кубики сил нам известны: две силы тяжести $F_{\text{т}}$ и сила Архимеда на верхний кубик F_1. Таким образом, осталось лишь выразить силу, действующую на нижний кубик со стороны воды, через x. Сила Архимеда вызывается разностью давлений жидкости, действующих на нижнюю и верхнюю грань кубика. Вычислим эту разность.

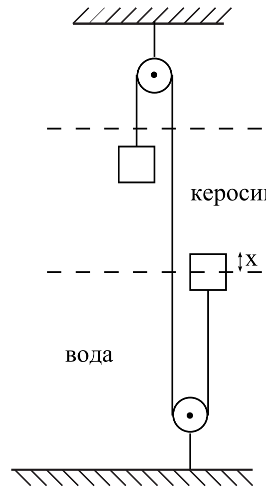

Рис. 9.

$$\Delta P = \rho_k g x + \rho g (a - x)$$

И тогда сила со стороны жидкости равняется

$$a^2 \Delta P = a^2 (\rho_k g x + \rho g (a - x))$$

Подставив это выражение в условие равновесия системы, вычислим x.

$$F_1 + a^2 (\rho_k g x + \rho g (a - x)) - 2F_{\text{т}} = 0$$

Отсюда

$$a^2 (\rho_k g x + \rho g (a - x)) = 72\ H$$
$$4 \cdot 10^{-2} (8 \cdot 10^2 \cdot 10x + 10^3 \cdot 10(0.2 - x)) = 72$$
$$80x + 20 - 100x = 18$$
$$20x = 2 \Rightarrow x = 0.1$$

Таким образом, нижний кубик возвышается над границей раздела жидкостей на 10 сантиметров (т.е. на половину своей длины), а верхняя грань верхнего бруска – на 70 сантиметров.

Ответ: Верхняя грань верхнего бруска будет находиться на расстоянии 70 сантиметров от границы раздела жидкостей.

Задача 6.

На протяжении решения задачи греческими буквами мы будем обозначать различные постоянные коэффициенты. Значения этих коэффициентов нам будут неизвестны, но и не важны.

Заметим, что радиус диска прямо пропорционален высоте, на которой находится диск. $R_D = \alpha \tilde{h}$. При равномерном движении высота, на которой находится диск, линейно уменьшается со временем:

$$\tilde{h}(t) = h - \beta t$$

Отсюда и радиус диска линейно уменьшается со временем.

$$R_D(t) = \alpha \tilde{h}(t) = \alpha \cdot (h - \beta t) = \alpha h - \alpha \beta t = R_0 - \gamma t$$

За R_0 мы обозначили здесь радиус диска в начальный момент времени.

Мощность, которую тратит нагреватель, пропорциональна изменению площади диска за единицу времени. Действительно, мощность за единицу времени – это теплота, которую нагреватель передал ледяному диску. Эта теплота идёт на плавление льда. А количество растаявшего льда, соответственно, прямо пропорционально теплоте, которую льду передали. В свою очередь, изменение площади диска пропорционально радиусу диска. Действительно, если радиус уменьшился на маленькое значение δR, то площадь уменьшилась на $2\pi R \delta R$.

Отсюда можно записать:
$$P(t) = \nu R_D(t)$$

Подставляя уже полученное выражение для зависимости радиуса диска от времени (значения коэффициентов пропорциональности нам всё ещё не известны), получаем

$$P(t) = \nu(R_0 - \gamma t) = P_0 - \mu t$$

И видим, что зависимость мощности от времени представляет собой линейную функцию, и т.е. её графиком будет прямая. Однако, нам неизвестен коэффициент μ. Но его несложно определить из условия того, что мощность должна обнулиться, когда диск дойдёт до низа конуса. Это произойдёт через 25 секунд после начального момента, поэтому $\mu = P_0/25$. Осталось лишь построить график.

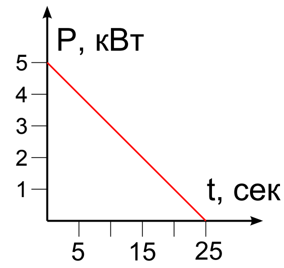

Рис. 10.

Ответ: Итоговый график изображён на рис. 10.

Задача 7.

Условием равновесия системы будет являться равновесие всех трёх рычагов. Вес гирь, стоящих в вершинах треугольника, при этом может быть произвольно распределён между рычагами, соединяющимися в соответствующей вершине. Нумеруя вершины треугольника по часовой стрелке (третья вершина соответствует гире M_3), напишем уравнения равновесия всех трёх рычагов:

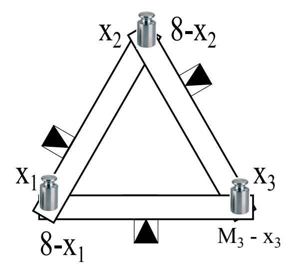

Рис. 11.

$$x_1 = 2x_2$$
$$(8 - x_2) = 2x_3$$
$$M_3 - x_3 = 8 - x_1$$

Введённые обозначения отмечены на рисунке.

При этом на x_1 и x_2 есть естественные ограничения: $0 \le x_1, x_2 \le 8$.

Из первого уравнения видно, что x_2 может находиться в интервале от нуля до четырёх килограммов. Действительно, иначе масса x_1 должна будет превышать 8 килограммов, что невозможно. Также легко заметить, что при любом допустимом значении x_2 значение x_1 также оказывается удовлетворяющим наложенным ограничениям. Поэтому осталось лишь выразить искомую массу M_3 через x_2.

$$x_3 = (8 - x_2)/2$$

$$M_3 = 8 - x_1 + x_3 = 8 - 2x_2 + 4 - x_2/2 = 12 - \frac{5}{2}x_2$$

Отсюда видно, что при минимальном значении $x_2 = 0$ масса M_3 оказывается равной 12 килограммам, при максимальном значении $x_2 = 4$ кг масса M_3 оказывается равной 2 килограммам. А значит, при любых значениях M_3 из указанного интервала массы остальных гирь сумеют перераспределиться по рычагам так, чтобы система оказалась в равновесии.

Ответ: Масса M_3 может быть любой в интервале от 2 кг до 12 кг.