

Задача 1 (всего 10 баллов)		
A	Связь с гармоническими колебаниями	<b>2 балла</b>
B	Положение равновесия смещается на 1 мм при перевороте	<b>2 балла</b>
C	$k_1 = k/4$	<b>1 балл</b>
D	$T_1 = 2T_0 = 4c$	<b>1 балл</b>
E	Колебания пошли вразнос	<b>2 балла</b>
F	Ответ	<b>2 балла</b>
Задача 2 (всего 10 баллов)		
A	Уравнение Клайперона-Менделеева верно применено для нахождения параметров идеального газа (давление = $10^5$ Па)	<b>1 балл</b>
B	Верно написана система трёх неравенств, описывающих условие неподвижности каждого из трёх поршней	<b>2 балла</b>
	Упущено одно из неравенств или Вместо неравенств рассматриваются только равенства	1 балл
C	На диаграмме в ответе участник верно расположил вертикальную и горизонтальную полосы, задающие решение двух из полученных неравенств	<b>2 балла</b>
D	На диаграмме в ответе участник верно расположил диагональную полосу, задающие решение третьего неравенства	<b>2 балла</b>
E	Верный масштаб на графике	<b>2 балла</b>
F	Верный ответ: правильно расположенная шестиугольная ячейка верного размера	
Задача 3 (всего 10 баллов)		
A	Теорема Гаусса	<b>4 балла</b>
B	Заряд внутри для 2-х вариантов	<b>3 балла</b>
C	Напряженность	<b>1 балл</b>
D	Ответ $E = \frac{(-1)^n \sigma}{2 \epsilon_0}$	<b>2 балла</b>

Задача 4 (всего 10 баллов)		
Баллы за пункты разбалловки можно получить, <b>только</b> если построение прокомментировано и работа содержит аргументы, объясняющие его справедливость. Построение на схеме без комментариев и доказательств оценивалось в <b>ноль баллов</b>		
A	Построено верно положение двух боковых зеркал	<b>3 балла</b>
B	Среднее зеркало, первая половина решения (не более одного пункта):	<b>2 балла</b>
	Рассмотрено какое-то одно положение зеркала, при котором виден отрезок КМ (например, когда середина КМ отображается в точку Т)	1 балл
	Идея о том, что следует искать положения зеркала, когда изображения точек К и М попадают в край	1 балл
	Выбирается какое-то положение зеркала, строится крайний луч и его биссектриса, зеркало объявляется перпендикулярным этой биссектрисе	2 балла
	Описано, что биссектриса должна попадать на край зеркала, но построение не выполнено	1 балл
C	Среднее зеркало: вторая половина решения (не более одного пункта):	<b>2 балла</b>
	Требуется найти точку окружности, касательная к которой является биссектрисой угла. Точка ищется перебором	2 балла
	Другое однозначное условие, задающее крайние положения зеркала, которое можно проверить графически. Подбор правильных точек	2 балла
D	Описание итеративной сходящейся процедуры, для построения крайних точек среднего зеркала	<b>3 балла</b>
Задача 5 (всего 10 баллов)		
A	ЭДС	<b>2 балла</b>
	без $\sin(\omega t)$	1 балл
B	$I = \epsilon / R$	<b>1 балл</b>
C	$F_A$	<b>1 балл</b>
D	$F_{mp}$	<b>1 балл</b>
E	$M_A = M_{mp}$	<b>3 балла</b>
F	$\sin^2(\omega t)_{max} = 1$	<b>1 балл</b>
G	Ответ	<b>1 балл</b>

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР 2015. 11 класс

## Задача 1.

Поскольку в задаче требуется исследовать движение кубика относительно бруска, а сила сжатия пружины зависит лишь от взаимного положения бруска и кубика, удобно решать задачу в системе отсчёта, в которой брусок неподвижен. Эта система отсчёта неинерциальна, ведь она движется с ускорением вместе с бруском. В ней на кубик кроме пружины будет действовать сила инерции, равная  $ma$ , где  $m$  – масса кубика. Сила эта в любой момент будет направлена в сторону, противоположную ускорению бруска, т.е. в течение первой секунды – вправо, затем, в течение второй секунды, – влево и т. д.

Опишем движение кубика в этой системе отсчёта. Первоначально пружина не растянута, кубик находится в положении равновесия (обозначим координату этой точки  $x_0 = 0$ ). Однако, при "включении" силы инерции  $ma$  положение равновесия кубика на пружинке смещается правее точки  $x_0$  на  $\Delta x = ma/k$  ( $k$  – жёсткость пружины), т.е. в точку с координатой  $y_1 = \Delta x$ . При этом кубик начинает смещаться в это новое положение равновесия, проскакивает его по инерции вправо и продолжает далее колебательное движение на пружине по гармоническому закону с амплитудой  $\Delta x$  (см. рис. 1). К началу второй секунды кубик расположится, таким образом, в некоторой точке  $x_1$ , так что расстояние между  $x_1$  и  $y_1$  будет не превышать  $\Delta x$ , т.е.  $x_1 \in (0, 2\Delta x)$  (где-то в интервале, охватываемом на рисунке 1) фигурной скобкой, помеченной "колебания за первую секунду".

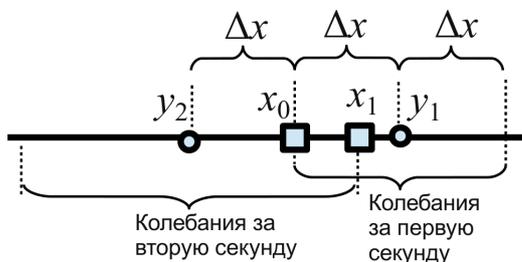


Рис. 1:

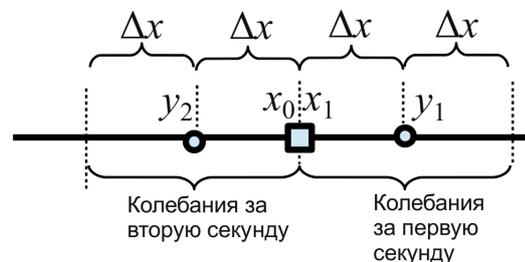


Рис. 2:

Далее "включается" сила инерции, направленная влево, так что положение равновесия кубика теперь находится в точке  $y_2 = -\Delta x$ . Кубик теперь колеблется вокруг этой точки с амплитудой  $x_1 - y_2$  (и располагается где-то внутри интервала, обозначенного на рисунке как "колебания за вторую секунду").

Из рис. 1 легко понять, что единственный случай, когда максимальное смещение кубика из начального положения  $x_0$  влево и вправо равны, – это когда  $x_1$  и  $x_0$  совпадают, т.е. когда кубик к началу второй секунды оказался в точности в точке  $x_0$ , совершив за первую секунду ровно одно колебание на пружине с периодом  $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k} = 1$  с. При дальнейшем движении кубик также будет к моменту "переключения" направления силы инерции возвращаться в точку  $x_0$ , что соответствует условию задачи (см. рис. 2). Максимальное отклонение кубика в каждую сторону  $2\Delta x$  равно по условию 1 мм.

Когда пружину удлиннили в 4 раза, её жёсткость уменьшилась в 4 раза и стала равна  $k/4$ . Действительно, под действием той же силы удлинённая в 4 раза пружина растягивается как суммарно четыре исходных пружины под действием той же силы, т.е. в 4 раза сильнее исходной; это как раз и значит, что жесткость удлинённой пружины в 4 раза меньше жёсткости исходной. Положения равновесия теперь будут сдвигаться при "переключении" силы инерции относительно начального положения на величину  $ma/(k/4) = 4\Delta x = 2$  мм, т.е. в точки  $y'_1 = 2$  мм,  $y'_2 = -2$  мм.

При этом период колебаний кубика на такой пружине стал  $2\pi\sqrt{m/4k} = 2T_0 = 2$  с. Значит, к началу второй секунды кубик совершит только пол-колебания и окажется в точке  $x'_1 = 4$  мм с нулевой скоростью. В этот момент положение равновесия переместится в точку  $y'_2 = -2$  мм, так что амплитуда следующего колебания составит  $x'_1 - y'_2 = 6$  мм. К началу третьей секунды кубик снова успеет совершить лишь пол-колебания, а в момент, когда он окажется в точке  $x_2 = -8$  мм, положение равновесия переместится в точку  $y_1$ .

Итак, во втором случае кубик будет раскачиваться, так как периодически меняющаяся сила инерции попала в резонанс колебаниям кубика на бруске.

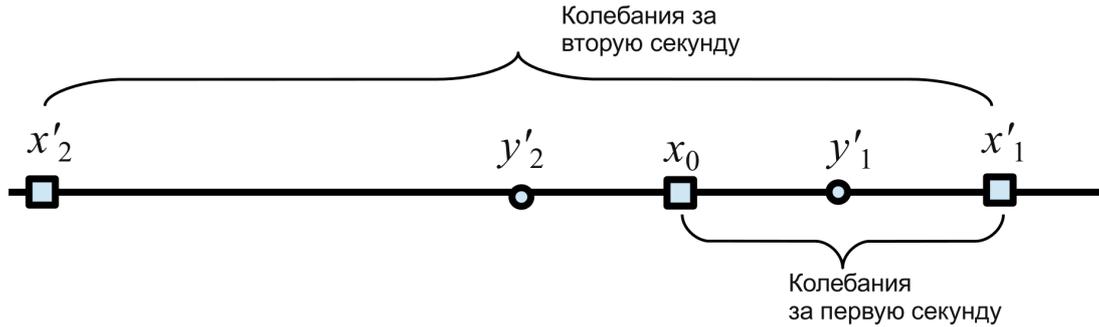


Рис. 3:

Рассуждая аналогично, следующее колебание будет иметь амплитуду 10 мм, и после половины такого колебания кубик окажется в точке  $x_3 = 12$  мм, и т. д., за каждую последующую секунду кубик будет отклоняться от  $x_0$  на 4 мм больше, чем за предыдущую.

К концу же 120й секунды кубик окажется на расстоянии  $120 \cdot 4 = 480$  мм = 48 см левее точки  $x_0$ . Заметим, что при длине пружины 48 см именно в этот момент кубик ударится о гвоздь.

Ответ: пружина будет сжата на 48 см, кубик ударится о гвоздь.

### Задача 2.

Обозначим давления газа в 1м, 2м и 3м отсеках через  $P_1, P_2, P_3$ . С помощью уравнения Клайперона-Менделеева найдём

$$P_1 = \nu RT_1/V = 10^5 \text{ Па}$$

Запишем условия равновесия поршней:

$$|P_1 - P_2| \leq F/S,$$

$$|P_1 - P_3| \leq F/S,$$

$$|P_2 - P_3| \leq F/S.$$

Изобразим на плоскости  $P_2, P_3$  множество точек, координаты которых удовлетворяют данной системе (см. рис. 4). Первое неравенство “вырезает” на этой плоскости горизонтальную полосу шириной  $2F/S = 10^4$  Па, второе – вертикальную полосу, а вместе они “вырезают” квадрат  $P_{2,3} \in [P_1 - F/S, P_1 + F/S]$ .

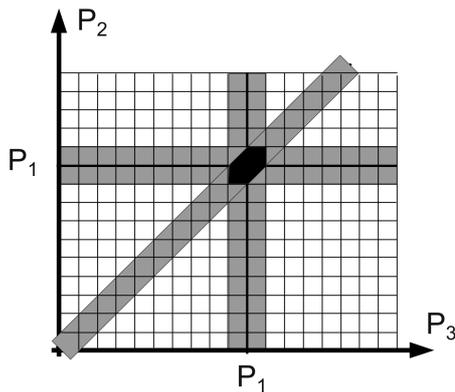


Рис. 4:

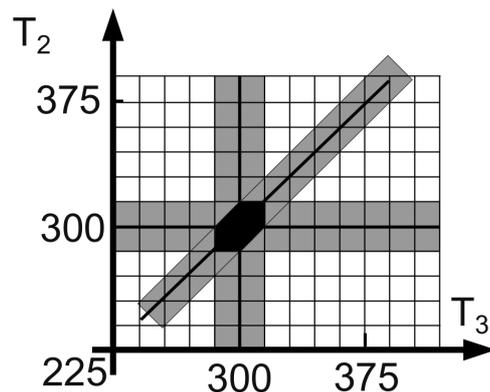


Рис. 5:

Нетрудно показать, что третье неравенство задает полосу, симметричную относительно биссектрисы  $P_2 = P_3$ . При этом границы полосы пересекают границы квадрата в точках  $(P_1 - F/S; P_1)$ ,  $(P_1; P_1 + F/S)$ ,  $(P_1; P_1 - F/S)$  и  $(P_1 + F/S; P_1)$ , выделяя шестиугольную ячейку, закрашенную на рисунке черным.

Чтобы найти возможные значения температуры, воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона. Т. к. газ во всех отсеках один и тот же, можно записать уравнение:

$$T_2 = \frac{T_1 P_2}{P_1}, \quad T_3 = \frac{T_1 P_3}{P_1},$$

поэтому достаточно изменить масштаб осей множителем  $T_1/P_1$ , чтобы получить искомый график.

Ответ: Все требуемые точки образуют шестиугольную ячейку, выделенную чёрным на рис 5.

### Задача 3.

Для решения задачи воспользуемся теоремой Гаусса: выделим мысленно цилиндрическую поверхность, симметрично окружающую  $n$ -тый цилиндр, но лежащую внутри  $(n + 1)$ -го цилиндра. Радиус  $R$  этой цилиндрической поверхности, удовлетворяет, очевидно, соотношению

$$n < \frac{R}{\Delta R} < (n + 1). \quad (1)$$

Длину цилиндра  $L$  выберем единичной

Из симметрии понятно, что система заряженных цилиндров будет создавать в любой точке нашей поверхности одинаковую по модулю напряженность, обозначим её  $E$ . Направление  $E$  в каждой точке перпендикулярно выбранной нами поверхности.

Поток  $E$  через нашу поверхность, очевидно, равен  $\Phi_E = 2\pi RLE$ . По теореме Гаусса эта величина равна  $Q/\epsilon_0$ , где  $Q$  – заряд исследуемой системы, попавший внутрь выбранной нами поверхности. В данном случае  $i$ -тый цилиндр вносит внутрь нашей поверхности заряд, равный по модулю  $|q_i| = 2\pi i \Delta R L \sigma$ , так что

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = 2\pi \Delta R L \sigma (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots \pm n),$$

знак в последнем слагаемом зависит от четности  $n$ .

Если  $n$  четное,

$$Q = 2\pi \Delta R L \sigma (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + n) = 2\pi \Delta R L \sigma ((2-1) + (4-3) + (6-5) + \dots + (n - (n-1))) = \pi \Delta R L n \sigma.$$

Тогда теорема Гаусса даёт

$$\Phi_E = 2\pi RLE = \frac{\pi \Delta R L n \sigma}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E(R) = \frac{\Delta R n \sigma}{2R\epsilon_0} = \frac{n\sigma}{2(R/\Delta R)\epsilon_0}$$

Если  $n$  нечетное,

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \Delta R L \sigma (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + (n-1) - n) = \\ &= 2\pi \Delta R L \sigma ((0-1) + (2-3) + (4-5) + \dots + ((n-1) - n)) = -\pi \Delta R L (n+1) \sigma. \end{aligned}$$

Тогда теорема Гаусса даёт

$$\Phi_E = 2\pi RLE = -\frac{\pi \Delta R L (n+1) \sigma}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E(R) = -\frac{\Delta R (n+1) \sigma}{2R\epsilon_0} = -\frac{(n+1)\sigma}{2(R/\Delta R)\epsilon_0}$$

Используем в ответах для  $E(R)$  ф-лу (1): при больших  $n$  единиц в правой части неравенства можно пренебречь, просто заменив  $R/\Delta R$  на  $n$ . Тогда при четных  $n$  получим  $E = \sigma/2\epsilon_0$ , при нечетных  $n$  получим  $E = -\sigma(n+1)/2n\epsilon_0 \simeq -\sigma/2\epsilon_0$ , здесь мы также пренебрегаем единицей по сравнению с  $n$ .

Ответ: напряжённость  $E = (-1)^n \sigma/2\epsilon_0$ .

### Задача 4.

По условию задачи требуется, чтобы точка К была видна в левое зеркало и располагалась в нём максимально справа – ведь именно тогда в зеркале “уместится” то, что находится максимально левее К. Значит, изображение К должно формироваться в зеркале на продолжении луча ВА. Построим луч, который выходит из К, отражается от зеркала в точке А и попадает в точку В – в глаз водителю. Очевидно, зеркало должно располагаться перпендикулярно биссектрисе  $\angle КАВ$  (см. рис. 6).

Аналогично, правое зеркало должно располагаться перпендикулярно биссектрисе угла МВВ (см. рис. 7).

Разберём теперь вопрос о допустимых положениях зеркала заднего вида.

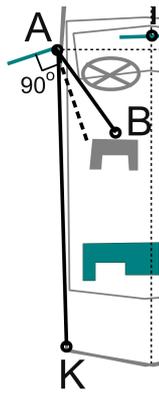


Рис. 6:

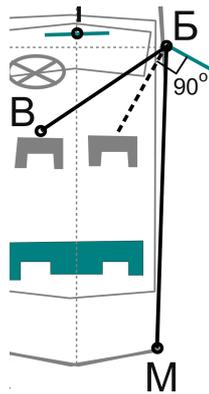


Рис. 7:

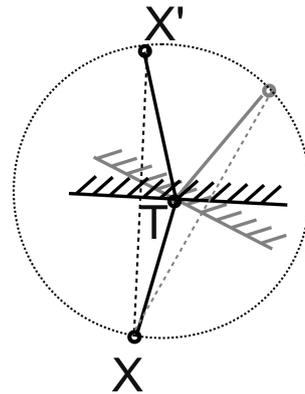


Рис. 8:

Предположим, что водитель может увидеть в зеркало весь отрезок КМ, расположив зеркало некоторым образом. Тогда, слегка повернув его, он увидит, как изображение КМ сдвигается к краю. Таким образом, следует найти два крайних положения: при одном изображении КМ расположено так, чтобы изображение точки К оказалась на краю зеркала (левом), при другом – изображение М (на правом краю).

Нарисуем окружность с центром в точке Т, по которой могут двигаться края зеркала заднего вида. Используя закон отражения, легко понять, что для построения одного крайнего положений зеркала, при котором на краю зеркала изображение К, следует найти такую точку F этой окружности, касательная к которой (или, что тоже самое, перпендикуляр к плоскости зеркала) оказывается биссектрисой угла КFB. Аналогично, для второго положения следует построить точку G окружности, касательная к которой является биссектрисой угла MGB. Конечно, можно искать точки F и G просто перебором, однако такой метод не позволяет контролировать точность построения. Следует придумать последовательность действий, позволяющую уточнять положение искомых точек до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность (говорят, "построить сходящуюся итерационную процедуру").

Чтобы разобраться в вопросе аккуратно, рассмотрим, как движется для некоторой точки X её изображение в зеркале при вращении зеркала вокруг оси Т (см. рис. 8). Понятно, что для любого положения зеркала, когда X отображается в точку X', расстояния XT и TX' совпадают. Значит, при вращении зеркала мнимое изображение "бежит" по окружности радиуса XT.

Возвращаясь к изображению отрезка КМ в зеркале заднего вида, легко понять, что при вращении зеркала вокруг точки Т отрезок КМ будет "ездить" по окружности с центром в точке Т. Ясно, что при повороте зеркала на некоторый угол изображение будет съезжать по окружности на вдвое больший угол.

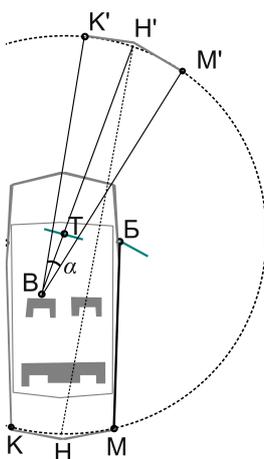


Рис. 9:

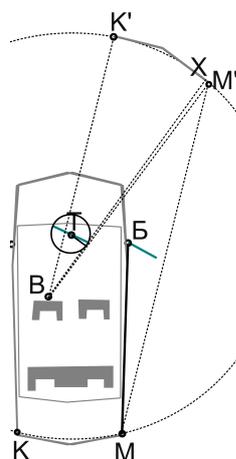


Рис. 10:

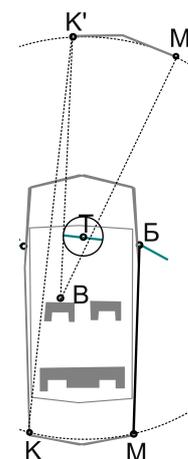


Рис. 11:

На рис. 9 представлено одно из положений зеркала, при которых водитель увидит в зеркале заднего вида отрезок  $KM$  в виде изображения  $K'M'$ . Для примера мы выбрали случай, когда водитель видит изображение точки  $H$  (середины  $KM$ ) ровно посередине зеркала,  $BH'$  проходит через  $T$ . Зеркало на этом рисунке ориентировано перпендикулярно биссектрисе угла  $HN'B$ .

Построенное положение вовсе не единственно, ведь зеркало можно поворачивать, так чтобы края изображения  $K'$  и  $M'$  не выходили за пределы видимости.

Попробуем построить такое положение зеркала, при котором изображение точки  $M$  (точка  $M'$ ) водитель видит у правого края зеркала. Построим малую окружность, по которой двигаются края зеркала заднего вида. Из точки  $B$  проведём касательную к этой окружности и на её продолжении поставим точку  $M'$  (см. рис. 10). Расположим зеркало перпендикулярно биссектрисе угла  $BM'M$ .

Проблема этого построения в том, что зеркало оказалось не перпендикулярно  $BM'$ , значит, водитель увидит не весь отрезок  $K'M'$ : с его точки зрения точка  $M'$  чуть-чуть не поместится в зеркале. Действительно, прямая  $BX$ , соединяющая край зеркала и точку  $B$ , чуть отличается от касательной  $BM'$ , и водитель сможет видеть в зеркало лишь часть  $K'X$  от всего изображения. Чтобы исправить это, зеркало следует повернуть против часовой стрелки на половину угла  $XBM'$ , так что изображение точки  $M$  сместится в  $X$ , затем следует снова проверить, какая часть изображения не влезла, и снова повернуть зеркало... Данная итеративная процедура быстро сходится ввиду малости угла  $XBM'$ .

Положение, при котором на край зеркала приходится изображение точки  $K$ , представлено на рис. 11. Здесь также построена касательная к малой окружности и зеркало перпендикулярно биссектрисе угла  $KK'V$ . Все оговорки, касающиеся итеративной процедуры и предела погрешности остаются здесь справедливыми.

Напоследок заметим, что описанная итеративная процедура построения крайних положений зеркала заднего вида не является единственной. Можно было, например, взяв за стартовое положение зеркала, параллельное  $KM$ , расположить первоначально точки  $F$  и  $G$  на его краях, измерить углы  $KFB$  и  $MGB$ , расположить зеркало перпендикулярно одной, а потом другой биссектрисе, и назвать данные положения более точно найденными крайними положениями. Передвинув точки  $F$  и  $G$  снова измерить углы  $KFB$  и  $MGB$  и повторять процедуру. Ввиду того, что при сдвиге точек  $F$  и  $G$  измеряемые углы меняются слабо, такая итеративная процедура также быстро сходится.

Ответ: Положение боковых зеркал см. на рис. 6, 7. Крайние положения зеркала заднего вида изображены на рис. 10 и 11 (нулевая итерация итеративной процедуры). Итеративная процедура получения сколь угодно точных положений описана в решении.

### Задача 5.

Будем задавать поворот рамки углом  $\alpha$  между плоскостью рамки и вертикалью (см. рис. 12). Так как первоначально тележка едет равномерно,  $\alpha = \omega t$ , где  $\omega = V/r$  – угловая скорость вращения рамки.

При этом поток магнитного поля через рамку равен  $\Phi(t) = BS \cos \omega t$ , где  $S = 4a^2$  – площадь рамки. Этот поток меняется со временем, значит в рамке присутствует ЭДС индукции, равная

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = 4Ba^2\omega \sin \omega t.$$

Если в рамку включено сопротивление  $R$ , в ней возникает ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{4Ba^2V \sin \alpha}{rR},$$

направленный так, чтобы компенсировать изменение магнитного потока. Значит, на рамку с током будет действовать сила Ампера.

Из рис. 12, 13 видно, что для отрезков рамки, расположенных в вертикальной плоскости, силы Ампера не создаёт вращательного момента, они направлены перпендикулярно плоскости рисунка.

Для двух оставшихся отрезков рамки (перпендикулярных плоскости рисунка) сила Ампера будет равна  $F_A = 2IBa$ . Вращательный момент, тормозящий колесо, будет равен для каждого отрезка  $F_A a \sin \alpha$ , а для обоих отрезков – в два раза больше. Подставляя  $F_a$  и  $I$ , найдём суммарный момент силы Ампера, вращающий рамку (и колесо вместе с ней)

$$2F_A a \sin \alpha = 4IBa^2 \sin \alpha = \frac{16B^2 a^4 V \sin^2 \alpha}{rR}.$$

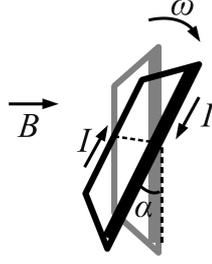


Рис. 12:

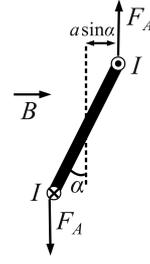


Рис. 13:

Этот суммарный вращательный момент будет тормозить оба колеса, достигая максимального значения  $16B^2a^4V/rR$  при  $\alpha = 0$ , т.е. в моменты, когда рамка горизонтальна.

При торможении вращения на каждое колесо начинает действовать сила трения  $F_{TP}$ , которая также создаёт суммарный вращательный момент в обоих колёсах, равный  $2rF_{TP}$ . При отсутствии проскальзывания  $F_{TP} < \mu mg/4$ , так что суммарный момент силы трения не превосходит  $\mu mgr/2$ .

Условие движения колёс без проскальзывания означает, что моменты сил, действующие на колёса, должны быть скомпенсированы. Действительно, по условию задачи массой колёс следует пренебречь. Если моменты сил, действующие на колёса, не скомпенсированы, лёгкие колёса приобретут бесконечно большое угловое ускорение, в то время как поступательное движение массивной тележки будет осуществляться с конечным ускорением; конечно, это не согласуется с движением без проскальзывания.

Приравнявая максимальные суммарные моменты силы трения и силы Ампера, получим

$$\frac{16B^2a^4V}{rR} = \frac{\mu mgr}{2} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{32B^2a^4V}{\mu mgr^2}.$$

Если  $R$  больше этого значения, момент силы Ампера будет меньше, и тележка поедет без проскальзывания. Если же  $R$  меньше – может начать проскальзывать в самый же первый момент.

Из ответа также видно, что с уменьшением скорости  $V$  величина  $R$  уменьшается, так что если проскальзывания нет в начальный момент торможения, то оно не появится и далее.

Ответ: сопротивление должно быть больше, чем  $32B^2a^4V/\mu mgr^2$ .