РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Перепишем исходное равенство: $p^4 = (n-q)(n+q)$. Учитывая, что $(n-q) < (n+q)$ и что p – простое число, возможны следующие случаи:

3) $\begin{cases} n-q=1 \\ n+q=p^4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} n-q=p \\ n+q=p^3 \end{cases}$

В случае 1): вычтем из второго уравнения первое. Получим равенство

$2q = p^4 - 1$

Это равносильно

$2q = (p-1)(p+1)(p^2+1)$

Так как q простое число, то это возможно только при $p-1=1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $p=2$ не подходит.

В случае 2): вычтем из второго уравнения первое. Получим равенство

$2q = p^3 - p$

Это равносильно

$2q = (p-1)p(p+1)$

Так как q простое число, то это возможно только при $p-1=1$.

Отсюда найдём $p=2, q=3, n=5$..

ОТВЕТ: $p=2, q=3, n=5$.

Задача 2

Применим метод математической индукции по параметру k. При $k=1$ формула очевидна. Допустим формула верна для значения $k-1$. Искомое число равно числу последовательностей

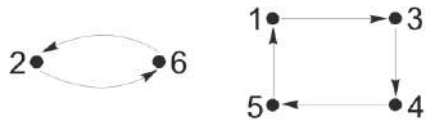
$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{k-1}, b_{k-1}, \qquad (2)$$

в которых количество $i = 1,2,\ldots k-1$, таких, что $a_i = 0$ и $b_i = 1$ четно (в этом случае пара (a_k, b_k) может быть только $(0,1)$) плюс количество последовательностей вида (2) в которых количество чисел $i = 1,2,\ldots k-1$, таких, что $a_i = 0$ и $b_i = 1$ нечетно, умноженному на 3 (так как пара (a_k, b_k) может быть любой из пар $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$). В итоге по предположению индукции нужное число последовательностей будет удовлетворять равенству

$$(2^{2(k-1)} - (2^{2(k-1)-1} - 2^{k-2})) + 3(2^{2(k-1)-1} - 2^{k-2}) = 2^{2k-1} - 2^{k-1}.$$

Задача 3

Приведенное в условии правило перестановки букв, или *перестановку*, будем обозначать греческой буквой σ. Перестановку σ можно интерпретировать как отображение множества цифр $\{1,2,3,4,5,6\}$ в себя. Например, тот факт, что первая буква перешла на третье место, можно записать как $\sigma(1) = 3$, а также изобразить стрелочкой из 1 в 3:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.	

Видно, что если бы мы перестановку σ применяли многократно, то буквы на 2-й и 6-й позициях постоянно менялись бы местами, а буквы на позициях 1, 3, 4, 5 переставлялись бы

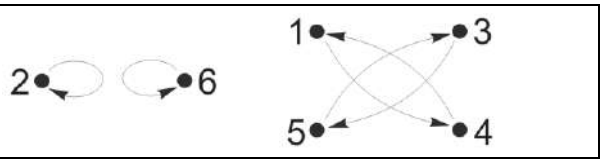
по циклу. Поэтому перестановка σ может символически быть записана в виде *произведения циклов*:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1345)(26) = 4 * 2.$$

Запись $4 * 2$ отражает *цикловую структуру* перестановки σ, показывая, что в ней один цикл длины 4 и один цикл длины 2.

Посмотрим теперь более детально на то, что произойдет, если по правилу σ переставить буквы еще раз. Так 1 при первом применении правила σ перешла в 3: $\sigma(1) = 3$, а при повторном применении 3 перешла в 4: $\sigma(3) = 4$. Значит, в результате двойной перестановки 1 переходит в 4. Будем это записывать как $\sigma\big(\sigma(1)\big) = 4$ или же $\sigma^2(1) = 4$. Поэтому правило двойной перестановки букв, представляющее собой *квадрат перестановки* σ, выглядит так:

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ = (14)(13)(2)(6) = 2 * 2 * 1 * 1.$$



Заметим, что после повторной перестановки 2 и 6 вернутся на свои места, то есть цикл $(2, 6)$ распадется на два тривиальных цикла (2) и (6), а цикл (1345) превратится в два цикла $(1,4)$ и $(3, 5)$. Таким образом, при повторном применении перестановки циклы четной длины $2n$ распадаются на два цикла, длины n каждый. Несложно проверить, что при этом циклы нечетной длины сохраняются. Справедливо утверждение.

Утверждение. *Перестановка представляет собой полный квадрат в том и только том случае, когда в ее представлении в виде произведения непересекающихся циклов имеется сколько и каких угодно циклов нечетной длины, в то время как циклов одной и той же четной длины должно быть четное число.*

Рассмотрим первую комбинацию `yeqwrt` из пункта а). Она получена из `qwerty` перестановкой $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1324561)$, которая представляет собой цикл длины 6. Поскольку циклов четной длины здесь нечетное количество (всего один), то, согласно утверждению, такая комбинация двойной перестановкой букв получиться не могла. Аналогично исследуются и остальные комбинации в пункте а).

Проведем подсчет общего числа перестановок, являющихся полными квадратами. Их цикловые структуры могут быть следующие:

- $1 * 1 * 1 * 1 * 1 * 1$. Это перестановка, оставляющая все на своих местах (тождественная перестановка). Она единственна.
- $1 * 5$. Мы должны выбрать 5 элементов из шести, чтобы составить цикл дины 5. Это можно сделать 6-ю способами. Из пяти элементов цикл длины 5 можно организовать $(5 - 1)!$ способами (действительно, организуем цикл из пяти элементов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; элемент a_1 может перейти в любой из четырех (т.к. в себя нельзя), элемент a_2 переходит в один из оставшихся трех и т.д. В итоге получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способов). Таким образом, здесь $6 \cdot 4! = 144$ перестановок.
- $2 * 2 * 1 * 1$. Выбрать два элемента из шести для первого цикла длины 2 можно C_6^2 способами. Для второго цикла длины 2 есть C_4^2 способа. Итого $C_6^2 \cdot C_4^2 = 90$. От порядка следования циклов результат не зависит, поэтому 90 еще следует разделить на два. Всего 45 перестановок с такой структурой.
- $3 * 3$. Здесь мы 6 элементов десятью способами ($\frac{1}{2}C_6^3 = 10$) разбиваем на две тройки и из каждой тройки получаем по 2 цикла. Всего 40 перестановок.
- $3 * 1 * 1 * 1$. Здесь мы двадцатью способами ($C_6^3 = 20$) выбираем тройку и из каждой тройки получаем по 2 цикла. Всего 40 перестановок.

В итоге, имеется $1 + 144 + 45 + 40 + 40 = 270$ перестановок длины 6, представляющих собой полный квадрат.

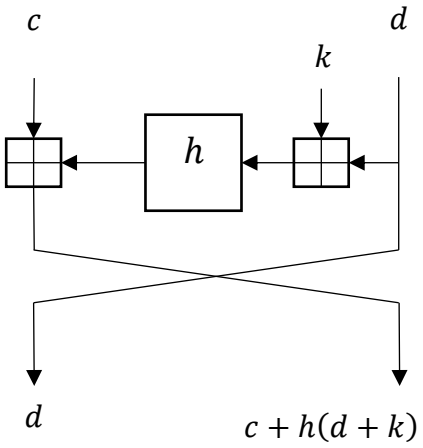
ОТВЕТ: а) Полученные двойной перестановкой комбинации выделены цветом.

yetrqw	eyrtqw	yrwteq	rewqyt	qwtyre	tywreq

б) 270.

Задача 4

Необходимо заметить, что из равенств
$(b_1, b_2) = g^{128}(a_1, a_2)$,
$(b_1', b_2') = g^{128}(a_1', a_2')$,
$(a_1', a_2') = g(a_1, a_2)$
следует равенство
$(b_1', b_2') = g(b_1, b_2)$.
Необходимым условием выполнения равенств $(a_1', a_2') = g(a_1, a_2)$, $(b_1', b_2') = g(b_1, b_2)$ являются равенства $a_1' = a_2$, $b_1' = b_2$. Среди приведенных в задаче пар знаков открытого и шифрованного текстов есть знаки, удовлетворяющие этому условию: одна пара $(21,0)$, $(0,17)$ и вторая пара $(29,5)$, $(5,21)$. То есть
$(15,25) = g^{128}(21,0)$,
$(25,4) = g^{128}(0,17)$.
Из условия задачи возможность найти ключ – воспользоваться равенствами
$(0,17) = g(21,0)$, $(25,4) = g(15,25)$.
Убедимся, что при этих условиях оба равенства дают одинаковое значение ключа k.



ОТВЕТ: 19.

Задача 5

Сначала надо решить СЛУ и определить значения $(b_1, \dots, b_4)$ – в нашем случае $(b_1, \dots, b_4)) = (1, 0, 0, 0)$. После в квадратичной системе от переменных $x_1, \dots, x_8$ зафиксируем значения переменных x_6, x_7, x_8 произвольным образом и решим полученную СЛУ относительно оставшихся переменных. В случае, если получится несовместная СЛУ как, например, при $x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 1$, то необходимо зафиксировать значения переменных x_6, x_7, x_8 другим образом. Например, при фиксации $x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 0$ имеем два решения $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 1, x_3 = x_5$

Задача 6

Число возможных вариантов d_1 и d_2 : $9 + 8 + \dots + 1 = 45$, можно для каждого варианта проверять, что соответствие входных и выходных символов, а можно предложить более

быстрый способ, заключающийся в нахождении сначала d_1 (максимум 9 вариантов), а затем d_2. Для этого достаточно заметить следующее.

Если рассмотреть систему уравнений, соответствующую выходным знакам на расстоянии d_1 вида $1 \dots 1$ в произвольном такте работы μ_1:

$$x_{\mu_1} + x_{\mu_1+d_1} + x_{\mu_1+d_1+d_2} \le 1,$$
$$x_{\mu_1+d_1} + x_{\mu_1+2d_1} + x_{\mu_1+2d_1+d_2} \le 1,$$

то если $x_{\mu_1+d_1} = 1$, то $x_{\mu_1} = 0, x_{\mu_1+2d_1} = 0$.

Это позволяет отбраковать опробуемый вариант d_1. Устанавливаем, что $d_1 = 4$.

Аналогично, если рассмотреть систему уравнений, соответствующую выходным знакам на расстоянии d_2 вида $0 \dots 0$ в произвольном такте работы μ_1 :

$$x_{\mu_1} + x_{\mu_1+d_1} + x_{\mu_1+d_1+d_2} \le 1,$$
$$x_{\mu_1+d_2} + x_{\mu_1+d_1+d_2} + x_{\mu_1+d_1+2d_2} \le 1,$$

тогда если $x_{\mu_1+d_1+d_2} = 0$, то $x_{\mu_1+d_1} = 0, x_{\mu_1+d_1+2d_2} = 0$.

Это позволяет отбраковать опробуемый вариант d_2 (с учётом найденного ранее $d_1 = 2$).

Находим $d_2 = 6$.

ОТВЕТ: $d_1 = 4, d_2 = 6$.