11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите наибольшее пятизначное число, которое в 51 раз больше квадрата суммы своих цифр. Решение обоснуйте.

2. На координатной прямой отмечены 9 точек с координатами $2; 25; 7; -3; 12; 19; -5; 8; 9$. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 9 точек минимальна. Ответ обоснуйте.

3. Ключом шифрсистемы служит таблица 4×4, в каждую ячейку которой записана одна из цифр 0, 1, 2. При этом должны делиться на 3 сумма цифр в каждой строке, сумма цифр в каждом столбце, а также суммы цифр на каждой из двух диагоналей, отмеченных пунктиром. На рисунке приведен один из возможных вариантов ключа. Сколько существует всего различных ключей?

1	1	2	2
2	1	1	2
0	0	1	2
0	1	2	0

4. Целое число $s \in \{0, \dots, 30\}$ может быть преобразовано следующим образом. Пусть, например, $s = 9$. Представим его в двоичной системе счисления *пятизначным* числом: $s = 9 = 01001_2$. Теперь выберем какое-нибудь целое число $c \geq 0$ и сдвинем получившуюся строку 01001 циклически на c позиций влево. Например, при $c = 1$ получится строка 10010, представляющая собой двоичную запись числа 18. Значит, сдвигом на одну позицию из числа 9 получается число 18; будем это записывать так: $9 \lll 1 = 18$. (Если

01001 сдвинуть влево на две позиции, то получится 00101, то есть $9 \lll 2 = 5$.) Итак, $s \lll c$ – это число, получившееся сдвигом числа s на c позиций влево.

Для зашифрования осмысленного слова выбирается секретный ключ – набор из 64 чисел $k_1, \dots, k_{32} \in \{0, \dots, 30\}$ и $c_1, \dots, c_{32} \in \{0,1,2,3\}$. Затем с каждой буквой слова (по отдельности) проделывается следующее. Букву заменяют числом a по таблице и последовательно вычисляют $a_1 = (a + k_1) \lll c_1,\ a_2 = (a_1 + k_2) \lll c_2, \dots, a_{32} = (a_{31} + k_{32}) \lll c_{32}$. Исходную букву затем заменяют на букву, соответствующую числу a_{32}. (Если в процессе вычислений получается число, превышающее 30, то оно заменяется остатком от деления на 31. Так, сумму $20 + 17$ сдедует заменить на 6.)

В результате зашифрования получился набор букв **ЯГКЫНИ**. Найдите исходное слово, если известно, что при зашифровании на этом ключе буква **Ъ** переходит в букву **Ь**, а буква **П** – в **Е**.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы заменили числами $x_1, x_2, \dots, x_n$ по таблице. Затем выбирали четные натуральные числа p и q и для каждого числа x_i из соотношений $x_i = y_i + pz_i,\ z_i = y_i + qx_i$ нашли целые числа y_i и z_i. Потом по формулам $z_i' = r_{32}(z_i), i = 1, \dots, n$ получили числа $z_1', \dots, z_n'$ (где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32), которые вновь заменили буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ЖЯЮЦКР**. Найдите исходное слово, если известно, что оно начинается на букву **В**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. Устройство принимает на вход и выдает на выход наборы из n битов (причем $n \geq 4$). Поданный на вход набор $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в выходной набор $h(\boldsymbol{x}) = (x_1 \oplus x_{n-1}, x_2 \oplus x_n, x_2 \oplus x_3, x_3 \oplus x_4, \dots, x_{n-2} \oplus x_{n-1}, x_1 \oplus x_n)$, где $\oplus$ – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Подав теперь этот набор $h(\boldsymbol{x})$ на вход, получим на выходе набор $h\big(h(\boldsymbol{x})\big) = h^{(2)}(\boldsymbol{x})$, который вновь подадим на вход и получим $h^{(3)}(\boldsymbol{x})$ и т.д. Докажите, что если все наборы $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \dots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ оказались различными, то $k \leq 2^{n-1} - 1$.