

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое в 198 раз больше суммы своих цифр. Решение обоснуйте.
2. На координатной прямой отмечены 5 точек с координатами 2; 25; -5 ; 8; 9. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 5 точек минимальна. Ответ обоснуйте.

3. Ключом шифрсистемы служит таблица 4×4 , в каждую ячейку которой записана одна из цифр 0, 1, 2. При этом должны делиться на 3 сумма цифр в каждой строке, сумма цифр в каждом столбце, а также суммы цифр на каждой из двух диагоналей, отмеченных пунктиром. На рисунке приведен один из возможных вариантов ключа. Сколько существует всего различных ключей?
4. На границе Криптоландии установлена пропускная система, имеющая 17 входов и 17 выходов (входы перед границей, выходы – уже в Криптоландии). Входы и выходы занумерованы независимо друг от друга числами от 1 до 17, причем в неизвестном для посетителей Криптоландии порядке. От каждого входа проложен один «прямой» туннель к одному из выходов, причем от разных входов – к разным выходам. От каждого выхода проложен один «обратный» туннель ко входу с тем же номером, что у этого выхода. Посетитель сам выбирает один из входов. Войдя в него, он попадает в лифт, в котором есть 2 кнопки: зеленая – «ехать», красная – «выходить». Система работает следующим образом. Посетитель, находясь в лифте около входа, нажимает зеленую кнопку, лифт по прямому туннелю доставляет его к соответствующему выходу. Находясь в лифте около выхода, посетитель может: 1) нажать зеленую кнопку, и тогда лифт по обратному туннелю доставит его ко входу с тем же номером; 2) нажать красную кнопку, и тогда выход откроется, но только если его номер совпадает с номером того входа, через который посетитель вошел первоначально. В противном случае (при несовпадении номеров) посетитель будет удалён за пределы Криптоландии и сможет воспользоваться правом посещения только через год. Алиса решила провести каникулы в Криптоландии. При этом ей стала известна схема прямых туннелей системы пропуска:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	11	10	12	18	1	4	7	17	8	5	19	6	3	13	9	16	2	14	15

Здесь верхнее число является номером входа, а стоящее под ним число – номером того выхода, к которому ведет прямой туннель. За какое минимальное число поездок по туннелям Алиса сможет гарантированно попасть в Криптоланию? Ответ обоснуйте.

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы заменили числами x_1, x_2, \dots, x_n по таблице. Затем выбирали четные натуральные числа p и q и для каждого числа x_i из соотношений $x_i = y_i + pz_i$, $z_i = y_i + qx_i$ нашли целые числа y_i и z_i . Потом по формулам $z'_i = r_{32}(z_i)$, $i = 1, \dots, n$ получили числа z'_1, \dots, z'_n (где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32), которые вновь заменили буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ХСКИЩА**. Найдите исходное слово, если известно, что оно начинается на букву **Щ**.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	

6. Устройство принимает на вход и выдает на выход наборы из n битов (причем $n \geq 5$). Поданный на вход набор $x = (x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в выходной набор $h(x) = (x_1 \oplus x_{n-1}, x_2 \oplus x_n, x_2 \oplus x_3, x_3 \oplus x_4, \dots, x_{n-2} \oplus x_{n-1}, x_1 \oplus x_n)$, где \oplus – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Подав теперь этот набор $h(x)$ на вход, получим на выходе набор $h(h(x)) = h^{(2)}(x)$, который вновь подадим на вход и

XXX Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии

получим $h^{(3)}(x)$ и т.д. Докажите, что если все наборы $x, h(x), h^{(2)}(x), \dots, h^{(k)}(x)$ оказались различными, то $k \leq 2^{n-1}$.