РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Обозначим $\boldsymbol{x}$ – искомое число**,** $\boldsymbol{s}$ – сумма его цифр. Тогда $\boldsymbol{x = 198 \cdot s}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}$ делится нацело на 9. По признаку делимости на 9, число $\boldsymbol{s}$ делится на 9. Так как искомое число четырёхзначное, то для $\boldsymbol{s}$ возможны 4 варианта: $\boldsymbol{s = 9, s = 18, s = 27, s = 36}$. Для каждого $\boldsymbol{s}$, соответственно, находим: $\boldsymbol{x = 1782, x = 3564, x = 5346, x = 7128}$. Подходящее: $\boldsymbol{x = 3564}$.

ОТВЕТ: 3564.

Задача 2

Расположим числа в порядке возрастания: $-5; 2; \mathbf{8}; 9; 25$. Покажем, что выделенное среднее число **8** является искомым. Обозначим $s(y)$ - сумма расстояний от числа y до остальных чисел. Рассмотрим число $y = 8 + x$. Если $x \in (0; 1)$, то сумма расстояний от y до первых четырех чисел увеличится на $2x$, а до последних четырех – уменьшится на $2x$ (по сравнению с числом 8), и при этом до самого числа 8 расстояние равно x, то есть $s(y) = s(8) + x$. Если $x = 1$, то есть $y = 9$, то сумма расстояний от y до всех чисел будет равна $s + 1$. Рассуждая аналогично при $x \in (1; +\infty)$, получим вывод: минимальное значение $s(y)$ достигается при $y = 8$. При отрицательных значениях x рассуждения ничем не отличаются.

ОТВЕТ: 8**.**

Задача 3

Указанную в условии таблицу 4×4, можно построить следующим образом: положим элементы верхнего левого угла размеров 3×3, произвольным образом, после чего заметим, что все оставшиеся элементы определяются однозначно из линейных (по модулю 3) соотношений для строк и столбцов (при этом элемент в правом нижнем углу будет равен сумме по модулю 3 всех остальных элементов квадрата). Плюс к этому имеем два линейных соотношения для элементов диагоналей. Таким образом, общее число независимого выбора переменных $a_{i,j}, i, j = 1,2,3$ равно 7. Следовательно, общее число ключей равно $3^7 = 2187$.

ОТВЕТ: 2187.

Задача 4

Если для начала движения выбран вход с номером 1, то далее перемещение по циклу 1-13-14-9-4-6-11. Для входа с номером 2: 2-10-5-3-7. Для входа с номером 8: 8-16. Последний цикл 12-15-17. Если бы был известен начальный номер входа, то решение сводилось бы к выбору нужного числа поездок по прямым туннелям из множества чисел $\{7,5,2,3\}$. Но поскольку этот номера неизвестен, то необходимо совершить НОК$\{7,5,2,3\} = 210$ поездок.

ОТВЕТ: 210.

Задача 5

Рассмотрим произвольную букву открытого и шифрованного текстов. Для соответствующих им (по таблице) чисел x и z' выполняются равенства $x = y + pz$ и $z = y + qx$, при некотором y, p и q. При этом по условию $z' = r_{32}(z)$. Используя свойство сравнений по модулю целого числа, получим: $x - z' = pz' - qx(mod\ 32)$ или $x(1+q) = z'(1+p)(mod\ 32)$.

Для дальнейшего решения будем пользоваться следующим свойством: если наибольший общий делитель чисел a и n равен 1, то сравнение $x = y(mod\ n)$ равносильно $ax = ay(mod\ n)$. Используя условие задачи для первой буквы открытого и шифрованного текста, получим равенство $3(1+q) = 7(1+p)(mod\ 32)$. Заметим, что $7 \cdot 5 = 3(mod\ 32)$. Тогда $3 \cdot 5 \cdot (1+q) = 7 \cdot 5 \cdot (1+p)(mod\ 32)$, что равносильно равенству $5 \cdot (1+q) = (1+p)(mod\ 32)$. Значит, $x(1+q) = 5(1+q)z'(mod\ 32)$. В итоге получаем, что $x = 5z'(mod\ 32)$. Остается воспользоваться полученным соотношением для остальных букв. Получится слово **ГВОЗДЬ**.

Ответ: ГВОЗДЬ.

Задача 6

Заметим, что для всех $\boldsymbol{x}$ вектор $h(\boldsymbol{x})$ содержит четное число единиц, так как

$$(x_1 \oplus x_{n-1}) \oplus (x_2 \oplus x_n) \oplus (x_2 \oplus x_3) \oplus (x_3 \oplus x_4) \oplus \dots, \oplus (x_{n-2} \oplus x_{n-1}) \oplus (x_1 \oplus x_n) = 0.$$

Значит в рассматриваемой последовательности $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \dots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ (1) все векторы, начиная со второго, имеют четное количество единиц. Количество всех векторов, имеющих четное количество единиц, равно 2^{n-1}. Поэтому претендентом на самое большое количество различных векторов является последовательность (1), начинающаяся с вектора, содержащего нечетное количество единиц и продолжающаяся всеми векторами с четным количеством единиц. Количество векторов в такой последовательности будет $1 + 2^{n-1}$ Таким образом $k \leq 2^{n-1}$.