

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Обозначим x – искомое число, s – сумма его цифр. Тогда $x = 198 \cdot s$. Следовательно, x делится нацело на 9. По признаку делимости на 9, число s делится на 9. Так как искомое число четырёхзначное, то для s возможны 4 варианта: $s = 9, s = 18, s = 27, s = 36$. Для каждого s , соответственно, находим: $x = 1782, x = 3564, x = 5346, x = 7128$. Подходящее: $x = 3564$.

ОТВЕТ: 3564.

Задача 2

Расположим числа в порядке возрастания: $-5; 2; 8; 9; 25$. Покажем, что выделенное среднее число **8** является искомым. Обозначим $s(y)$ – сумма расстояний от числа y до остальных чисел. Рассмотрим число $y = 8 + x$. Если $x \in (0; 1)$, то сумма расстояний от y до первых четырех чисел увеличится на $2x$, а до последних четырех – уменьшится на $2x$ (по сравнению с числом 8), и при этом до самого числа 8 расстояние равно x , то есть $s(y) = s(8) + x$. Если $x = 1$, то есть $y = 9$, то сумма расстояний от y до всех чисел будет равна $s + 1$. Рассуждая аналогично при $x \in (1; +\infty)$, получим вывод: минимальное значение $s(y)$ достигается при $y = 8$. При отрицательных значениях x рассуждения ничем не отличаются.

ОТВЕТ: 8.

Задача 3

Указанную в условии таблицу 4×4 , можно построить следующим образом: положим элементы верхнего левого угла размеров 3×3 , произвольным образом, после чего заметим, что все оставшиеся элементы определяются однозначно из линейных (по модулю 3) соотношений для строк и столбцов (при этом элемент в правом нижнем углу будет равен сумме по модулю 3 всех остальных элементов квадрата). Плюс к этому имеем два линейных соотношения для элементов диагоналей. Таким образом, общее число независимого выбора переменных $a_{i,j}, i, j = 1, 2, 3$ равно 7. Следовательно, общее число ключей равно $3^7 = 2187$.

ОТВЕТ: 2187.

Задача 4

Если для начала движения выбран вход с номером 1, то далее перемещение по циклу 1-20-15-13-6. Для входа с номером 2: 2-11-5-18. Для входа с номером 3: 3-10-8-7-4-12-19-14. Последний цикл 9-17-16. Если бы был известен начальный номер входа, то решение сводилось бы к выбору нужного числа поездок по прямым туннелям из множества чисел $\{5, 4, 8, 3\}$. Но поскольку этот номера неизвестен, то необходимо совершить $\text{НОК}\{5, 4, 8, 3\} = 120$ поездок.

ОТВЕТ: 120.

Задача 5

Рассмотрим произвольную букву открытого и шифрованного текстов. Для соответствующих им (по таблице) чисел x и z' выполняются равенства $x = y + pz$ и $z = y + qx$, при некотором y, p и q . При этом по условию $z' = r_{32}(z)$. Используя свойство

сравнений по модулю целого числа, получим: $x - z' = pz' - qx \pmod{32}$ или $x(1 + q) = z'(1 + p) \pmod{32}$.

Для дальнейшего решения будем пользоваться следующим свойством: если наибольший общий делитель чисел a и n равен 1, то сравнение $x = y \pmod{n}$ равносильно $ax = ay \pmod{n}$. Используя условие задачи для первой буквы открытого и зашифрованного текста, получим равенство $25(1 + q) = 21(1 + p) \pmod{32}$. Заметим, что $21 \cdot 21 = 25 \pmod{32}$. Тогда $25 \cdot 21 \cdot (1 + q) = 21 \cdot 21 \cdot (1 + p) \pmod{32}$, что равносильно равенству $21 \cdot (1 + q) = (1 + p) \pmod{32}$. Значит, $x(1 + q) = 21(1 + p)z' \pmod{32}$. В итоге получаем, что $x = 21z' \pmod{32}$. Остается воспользоваться полученным соотношением для остальных букв. Получится слово **ЩЕТИНА**.

ОТВЕТ: ЩЕТИНА.

Задача 6

Заметим, что для всех \mathbf{x} вектор $h(\mathbf{x})$ содержит четное число единиц, так как

$$(x_1 \oplus x_{n-1}) \oplus (x_2 \oplus x_n) \oplus (x_2 \oplus x_3) \oplus (x_3 \oplus x_4) \oplus \dots \oplus (x_{n-2} \oplus x_{n-1}) \oplus (x_1 \oplus x_n) = 0.$$

Значит в рассматриваемой последовательности $\mathbf{x}, h(\mathbf{x}), h^{(2)}(\mathbf{x}), \dots, h^{(k)}(\mathbf{x})$ (1) все векторы, начиная со второго, имеют четное количество единиц. Количество всех векторов, имеющих четное количество единиц, равно 2^{n-1} . Поэтому претендентом на самое большое количество различных векторов является последовательность (1), начинающаяся с вектора, содержащего нечетное количество единиц и продолжающаяся всеми векторами с четным количеством единиц. Количество векторов в такой последовательности будет $1 + 2^{n-1}$. Таким образом $k \leq 2^{n-1}$.