

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

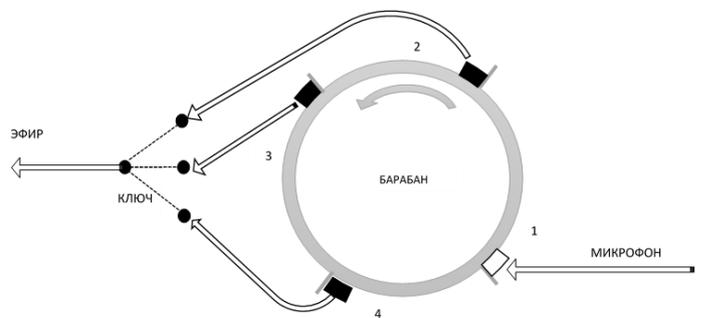
1. Известно, что p, p_1, p_2, p_3 – различные простые числа, и $p^3 - 2p^2 - 16p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 - 32$. Найдите все такие числа p, p_1, p_2, p_3 . Ответ обоснуйте.
2. Для зашифрования осмысленного слова его буквы переводят в числа x_1, x_2, \dots, x_n по таблице. Затем выбирают натуральные числа x_0 и k . Далее число x_0 приписывают в начало последовательности x_1, x_2, \dots, x_n , а число $x_{n+1} = x_0 + 19^{n+4}$ (где n – длина слова) – в ее конец. Получившаяся в результате последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ затем преобразуется в последовательность $y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}$ по формуле $y_i = r_{32}(x_i + 6x_i \cdot k^3 + k)$, $i = 0, 1, \dots, n + 1$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем числа y_0, y_1, \dots, y_{n+1} заменяют буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **КЙЫЦНБНЦЛ**. Какое слово было зашифровано?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| А | Б | В | Г | Д | Е | Ё | Ж | З | И | Й | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Ъ | Ы | Ь | Э | Ю | Я |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |

3. Каждому из четырех абонентов A_1, A_2, A_3, A_4 надо выдать по два уравнения вида $aw + bx + cy + dz = t$, где $a, b, c, d, t, w, x, y, z \in \{0,1\}$. Значения секретных битов w, x, y, z одинаковы для всех абонентов и им заранее неизвестны. Приведите хотя бы один пример уравнений, которые надо выдать этим четверем абонентам, чтобы каждая пара $\{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A_2, A_3\}$ могла достоверно вычислить w, x, y, z , но чтобы при этом: 1) ни одна другая пара абонентов не могла бы достоверно вычислить более одного секретного бита; 2) ни один абонент в одиночку не был в состоянии достоверно вычислить даже один секретный бит. Например, если абонент A_1 получит уравнения $\{w + x + y + z = 1; w + x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1\}$, а $A_2 - \{w + 0 \cdot x + y + 0 \cdot z = 0; w + x + 0 \cdot y + z = 0\}$. Тогда, объединившись, из имеющихся в их распоряжении четырех уравнений они однозначно найдут, что $w = 1, x = 0, y = 1, z = 1$. При этом будем говорить, что пара абонентов $\{A_1, A_2\}$ может достоверно вычислить секретные биты w, x, y, z . Здесь традиционно полагается, что $1+1=0$.
4. Саша решил отправить Маше записку. Для этого каждую букву сообщения он заменил комбинацией из 0 и 1 согласно таблице (А – 00000, Б – 00001, ..., Я – 11111). Взяв день "Д" и номер месяца "М" своего рождения Саша вычислил $u_1 = Д^2 + М^2, u_2 = Д \cdot М, u_3 = Д - М$. Далее Саша вычислил четвертое $u_4 = r_{32}(u_1 + u_2 u_3)$, пятое $u_5 = r_{32}(u_2 + u_3 u_4)$, ..., n-ое число $u_n = r_{32}(u_{n-3} + u_{n-2} u_{n-1})$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. К i -му биту символу исходного сообщения (0 или 1) он прибавил число u_i и взял остаток от деления на 2. Полученную последовательность из 0 и 1 он вновь преобразовал в буквы по таблице и получил следующее сообщение: **ЖДУЛЩБШЛТВЩЧ**. Помогите Маше прочитать его.

| А | Б | В | Г | Д | Е | Ж | З | И | Й | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Ъ | Ы | Ь | Э | Ю | Я |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |

5. Звук записывается на магнитный слой барабана, который вращается с постоянной скоростью, совершая один оборот за 4 секунды. Рядом с барабаном по окружности через равные расстояния размещены записывающая (1) и три читающие головки (2), (3), (4). В каждый момент времени в телефонную линию передается сигнал с одной из читающих головок. Устройство спроектировано так, что каждый участок сигнала будет передан в линию один раз, а сама передача стартует, как только начало записи окажется у 3-й читающей головки. Сколько различных вариантов звука, переданного в линию, может получиться, если сообщение длилось 20 секунд?



6. Рассмотрим девять чисел k_1, \dots, k_9 , где $k_i \in \{0,1,2\}$. При этом хотя бы одно число k_i отлично от нуля. С помощью этих чисел вырабатывают последовательность $u_1, u_2, \dots, u_{2019}$ по формулам: $u_1 = k_1, u_2 = k_2, \dots, u_9 = k_9, u_{i+9} = r_3(u_i + u_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, 2010$, где $r_3(a)$ – остаток от деления числа a на 3. Найдите такое наименьшее натуральное число l , что какие бы исходные числа k_1, \dots, k_9 мы ни взяли, в последовательности u_1, u_2, \dots, u_l каждое из чисел 0, 1 и 2 гарантированно встретится хотя бы один раз.