

## 9 КЛАСС

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Про составленный из цифр 9-значный пароль  $(a_1, a_2, \dots, a_9)$  известно следующее: 1) сумма первых 5 цифр  $a_1 + \dots + a_5$  делится на 5, 2) сумма всех цифр пароля  $a_1 + \dots + a_9$  делится на 10. Сколько таких паролей?
2. Найдите натуральное число  $x$ , не превосходящее 77, если известно, что остатки от деления числа  $x^2$  на 77 и 96 равны соответственно 71 и 73.
3. Шляпник решил отправить по почте Зайцу свой пароль от компьютера (слово из 7-ми букв). Перед отправкой он его зашифровал следующим образом. Каждую букву слова он заменил пятизначной комбинацией в соответствии с таблицей из задачи 6 (считается, что Е=Ё). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. В результате у него получилась последовательность  $a_1, \dots, a_{35}$ , где  $a_i \in \{0;1\}$ . Затем Шляпник построил еще одну последовательность  $y_1, \dots, y_{35}$ , также состоящую из 0 и 1. Он наугад записал первые четыре члена последовательности  $y_1, y_2, y_3, y_4$  и выбрал четыре неотрицательных целых числа  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Оставшиеся члены последовательности  $y_5, \dots, y_{35}$  он подсчитал по формуле  $y_{n+4} = r_2(c_1 y_n + c_2 y_{n+1} + c_3 y_{n+2} + c_4 y_{n+3})$ , где  $r_2(b)$  – остаток от деления числа  $b$  на 2. Затем он вычислил  $b_i = r_2(a_i + c_i)$ ,  $i = 1, \dots, 35$ . Получившуюся последовательность  $b_1, \dots, b_{35}$  Шляпник разбил на фрагменты длиной 5, каждый из которых он преобразовал в буквы согласно таблице. Заяц получил строку **ГОШРОХБ**. Помогите ему определить пароль.

логин: Шляпник  
пароль: РЕ\*\*\*\*\*

4. Даны множества:

$$X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, X_2 = \{2, 5\}, X_3 = \{2, 3\}, X_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, X_5 = \{3, 5\},$$

$$X_6 = \{1, 3, 5, 6, 7\}, X_7 = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}, X_8 = \{5, 7, 8\}, X_9 = \{2, 3, 7, 9\}.$$

Сколько существует наборов *различных* цифр  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$  таких, что  $a_i \in X_i$ ? Предъявите все эти наборы.

5. Злоумышленник хочет получить доступ к банковской ячейке, защищенной кодовым замком. Комбинация из трех цифр  $(u, v, w)$ , отпирающая замок, ему не известна. Злоумышленнику удалось изготовить проксимити-карты со следующей информацией: на первой карте записаны цифры (1,5,8), на второй – (7,4,9), на третьей – (9,7,6), на четвертой – (3,2,4). При прикладывании карты с информацией  $(a, b, c)$  к считывающему устройству банковской ячейки, ее кодовый замок из состояния  $(i, j, k)$  переходит в состояние  $(i+a, j+b, k+c)$ . (Если какая-либо сумма превосходит 9, то она заменяется ее остатком от деления на 10.) Как только замок оказывается в состоянии  $(u, v, w)$ , он немедленно открывается. Какое наименьшее количество из имеющихся карт следует использовать, чтобы гарантированно открыть ячейку, независимо от установленной отпирающей комбинации  $(u, v, w)$  и начального состояния замка?
6. Агенту передаются сообщения с помощью специальных «передающих» часов, установленных на главной площади города. В заранее условленное время агент приходит к часам и начинает следить за их секундной стрелкой. Если прошла секунда, а стрелка не сдвинулась, значит передан 0, в противном случае (прошла секунда и стрелка сдвинулась) передана 1. Каждая буква сообщения закодирована пятизначной комбинацией из 0 и 1 в соответствии с таблицей (считается, что Е=Ё). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. При приеме сообщения случайный прохожий ненадолго отвлек агента. Помогите ему восстановить сообщение, если известно, что за время сеанса связи часы отстали на 81 секунду, а в блокноте у агента записаны следующие знаки:

**XXVI Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии**

01111100000100010101011100010001000100100010100111000000001010010100000000000010000101110000  
01000100000

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1