

## 10 КЛАСС

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Про составленный из цифр 10-значный пароль  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$  известно следующее: 1) сумма первых 5 цифр  $a_1 + \dots + a_5$  делится на 5, 2) сумма всех цифр пароля  $a_1 + \dots + a_{10}$  делится на 10. Сколько таких паролей?
2. Найдите натуральное число  $x$ , не превосходящее 85 такое, что при делении чисел  $x^{15}$  и  $x^{23}$  на 85 в остатке получится соответственно 23 и 28.
3. Шляпник решил отправить по почте Зайцу свой пароль от компьютера (слово из 7-ми букв). Перед отправкой он его зашифровал следующим образом. Каждую букву слова он заменил пятизначной комбинацией в соответствии с таблицей из задачи 6 (считается, что  $E=\ddot{E}$ ). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. В результате у него получилась последовательность  $a_1, \dots, a_{35}$ , где  $a_i \in \{0;1\}$ . Затем Шляпник построил еще одну последовательность  $y_1, \dots, y_{35}$ , также состоящую из 0 и 1. Он наугад записал первые четыре члена последовательности  $y_1, y_2, y_3, y_4$  и выбрал четыре неотрицательных целых числа  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Оставшиеся члены последовательности  $y_5, \dots, y_{35}$  он подсчитал по формуле  $y_{n+4} = r_2(c_1 y_n + c_2 y_{n+1} + c_3 y_{n+2} + c_4 y_{n+3})$ , где  $r_2(b)$  – остаток от деления числа  $b$  на 2. Затем он вычислил  $b_i = r_2(a_i + c_i)$ ,  $i = 1, \dots, 35$ . Получившуюся последовательность  $b_1, \dots, b_{35}$  Шляпник разбил на фрагменты длиной 5, каждый из которых он преобразовал в буквы согласно таблице. Заяц получил строку **ГОШРОХБ**. Помогите ему определить пароль.

логин: Шляпник  
пароль: PE\*\*\*\*\*

4. Даны множества:

$$X_1 = \{1, 6, 9\}, X_2 = \{2, 7\}, X_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, X_4 = \{2, 3, 4, 6, 9\}, X_5 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$X_6 = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}, X_7 = \{7, 9\}, X_8 = \{2, 6, 7, 8\}, X_9 = \{2, 9\}.$$

Сколько существует наборов *различных* цифр  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$  таких, что  $a_i \in X_i$ ?

Предъявите все эти наборы.

5. Злоумышленник хочет получить доступ к банковской ячейке, защищенной кодовым замком. Комбинация из трех цифр  $(u, v, w)$ , отпирающая замок, ему не известна. Злоумышленнику удалось изготовить проксимити-карты со следующей информацией: на первой карте записаны цифры (7,5,6), на второй – (9,8,3), на третьей – (3,9,2), на четвертой – (1,4,8). При прикладывании карты с информацией  $(a, b, c)$  к считывающему устройству банковской ячейки, ее кодовый замок из состояния  $(i, j, k)$  переходит в состояние  $(i+a, j+b, k+c)$ . (Если какая-либо сумма превосходит 9, то она заменяется ее остатком от деления на 10.) Как только замок оказывается в состоянии  $(u, v, w)$ , он немедленно открывается. Какое наименьшее количество из имеющихся карт следует использовать, чтобы гарантированно открыть ячейку, независимо от установленной отпирающей комбинации  $(u, v, w)$  и начального состояния замка?
6. Агенту передаются сообщения с помощью специальных «передающих» часов, установленных на главной площади города. В заранее условленное время агент приходит к часам и начинает следить за их секундной стрелкой. Если прошла секунда, а стрелка не сдвинулась, значит передан 0, в противном случае (прошла секунда и стрелка сдвинулась) передана 1. Каждая буква сообщения закодирована пятизначной комбинацией из 0 и 1 в соответствии с таблицей (считается, что  $E=\ddot{E}$ ). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. При приёме сообщения случайный прохожий ненадолго отвлек агента. Помогите ему восстановить сообщение, если известно, что за время сеанса связи часы отстали на 85 секунд, а в блокноте у агента записаны следующие знаки: 010000010001000100100010100010001000111001100011010111001100001011000011000111101110011010

