РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Чтобы удовлетворить условию (1), первые четыре цифры можно выбрать произвольным образом, тогда пятая может быть найдена двумя способами. Следовательно, первые пять цифр можно выбрать $2\cdot10^4$ способами. Следующие четыре цифры $(a_6,\ldots,a_9)$ выбираем произвольно, а выполнение условия (2) обеспечивается единственно возможным выбором цифры a_{10}. Таким образом, количество наборов из 10-и цифр, удовлетворяющих условиям (1) и (2), равно $2\cdot10^4\cdot10^4=2\cdot10^8$.

Ответ: $2\cdot10^8$.

Задача 2

Заметим, что $\left(x^{23}\right)^2=x\cdot\left(x^{15}\right)^3$. Следовательно, $28^2\equiv x\cdot23^3 \pmod{85}$. Поскольку $28^2\equiv19 \pmod{85}$ и $23^3\equiv12 \pmod{85}$, получаем, что $19\equiv x\cdot12 \pmod{85}\Leftrightarrow12x=85k+19,\ k\in Z$. Отсюда $x=7k+1+\dfrac{k+7}{12}$. Чтобы число $k+7$ делилось нацело на 12, необходимо и достаточно, чтобы число k давало остаток 5 при делении на 12, т.е. $k=12m+5,\ m\in Z$. Следовательно, $x=85m+37$. По условию $0<x\le85$, поэтому $x=37$.

Ответ: 37.

Задача 3

Поскольку

$$r_2(a\cdot b)=r_2\big(r_2(a)\cdot r_2(b)\big),r_2(a+b)=r_2\big(r_2(a)+r_2(b)\big),$$

можно далее считать, что числа $c_0,c_1,c_2,c_3\in\{0,1\}$.

Представим первые две буквы полученной строки в виде последовательности $b_1,\ldots,b_{10}$: 0001101110.Тогда, предположив, что первые буквы пароля это «РЕ», получим, что $a_1,\ldots,a_{10}$: 1000000101, и можно вычислить $y_1,\ldots,y_{10}$:

$$b_i=r_2(y_i+a_i)\Leftrightarrow y_i=r_2(b_i+a_i).$$

Получим 1001101011. Используя рекуррентную формулу для членов последовательности $y_5,\ldots,y_{10}$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases}y_5=r_2(c_0y_1+c_1y_2+c_2y_3+c_3y_4)\\y_6=r_2(c_0y_2+c_1y_3+c_2y_4+c_3y_5)\\y_7=r_2(c_0y_3+c_1y_4+c_2y_5+c_3y_6)\\y_8=r_2(c_0y_4+c_1y_5+c_2y_6+c_3y_7)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1=r_2(c_0+c_3)\\0=r_2(c_2+c_3)\\1=r_2(c_1+c_2)\\0=r_2(c_0+c_1+c_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=r_2(c_0+c_3)\\0=r_2(c_2+c_3)\\1=r_2(c_1+c_3)\\0=r_2(c_0+c_1+c_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=r_2(c_0+c_3)\\0=r_2(c_2+c_3)\\1=r_2(c_1+c_3)\\1=r_2(c_0)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2) \\ 1 = r_2(c_1) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases}$$

В силу отмеченного ранее можно считать, что $c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$. Тогда закон рекурсии для последовательности $y_1, \dots, y_{35}$ имеет вид:

$$y_{n+4} = r_2(y_n + y_{n+1}).$$

Теперь, используя фрагмент последовательности $y_1, \dots, y_{10}$ можно вычислить и всю оставшуюся последовательность $y_{11}, \dots, y_{35}$: 1100010011010111100010011. Для нахождения пароля остается преобразовать буквы полученной строки в последовательность из 0 и 1, а затем воспользоваться формулой:

$$\mathrm{a_i} = \mathrm{r_2}(\mathrm{y_i} + \mathrm{b_i}).$$

Получим строку $\mathrm{a}_{11}, \dots, a_{35}$: 00000 00011 00101 01101 10010, преобразовывая которую согласно таблице, придем к последовательности букв АГЕНТ. В итоге искомым паролем является слово РЕАГЕНТ.

Ответ: РЕАГЕНТ.

Задача 4

Комментарий

Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$, в котором все элементы различны и $a_i \in X_i, i = 1, \dots, n$, называется *трансверсалью* или *системой различных представителей* данного семейства множеств. Как видно из условия, в данной задаче требуется найти все трансверсали семейства множеств $X_1, \dots, X_9$.

Понятие трансверсали семейства множеств связано с понятием *матрицы инцидентности семейства множеств.* Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда матрицей инцидентности данного семейства называется таблица, имеющая n строк и m столбцов, состоящая из нулей и единиц вида:

<table>
<tr><td colspan="6"></td><td>x_1</td><td>…</td><td>x_j</td><td>…</td><td>x_m</td></tr>
<tr><td colspan="6">X_1</td><td>b_{11}</td><td>…</td><td>b_{1j}</td><td>…</td><td>b_{1m}</td></tr>
<tr><td colspan="6">⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td colspan="6">X_i</td><td>b_{i1}</td><td>…</td><td>b_{ij}</td><td>…</td><td>b_{im}</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>X_n</td><td>b_{n1}</td><td>…</td><td>b_{nj}</td><td>…</td><td>b_{nm}</td></tr>
</table>

где $b_{ij} = 1$ только если $x_j \in X_i$ и $b_{ij} = 0$ – в противном случае. Упорядоченный набор элементов $\left(b_{1j_1}, \dots, b_{nj_n}\right)$, равных 1, в котором элементы лежат в разных столбцах, называется *трансверсалью матрицы инцидентности*. Нетрудно понять, что число трансверсалей семейства множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ равно числу трансверсалей матрицы инцидентности данного семейства.

Решение

Запишем матрицу инцидентности $B = \left(b_{ij}\right)$, $i = 1, \dots, 9;\ j = 1, \dots, 9$ всех цифр множеств X_i: То есть, $b_{ij} = 1$, если $j \in X_i$, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. В этой матрице нам необходимо найти все наборы (*трансверсали*) вида $b_{1j_1}, \dots, b_{9j_9}$, где $j_1, \dots, j_9$ – некоторая перестановка цифр 1,2,…,9, и все $b_{ij_k} = 1,\ i = 1, \dots, 9;\ k = 1, \dots, 9.$ Иными словами мы ищем такие наборы из 9 единиц, что все единицы одного набора лежат в разных строках и разных

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

столбцах. Для облегчения поиска переставим в матрице B строки и столбцы (в целом, строки с меньшим количеством 1 ставим выше, а столбцы с большим количеством 1 – левее). Результат приведен на рис. 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 2

Поскольку единицы надо выбирать из разных строк и столбцов, сначала следует выбирать 1 из отмеченной пунктиром матрицы 3 на 3. В ней две трансверсали. Затем выбираем трансверсали в двух отмеченных прямоугольником матрицах 3 на 3. В каждой из них по 3 трансверсали. Значит, всего 18 трансверсалей.

Ответ: 18 наборов.

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 8, 7, 6, 9), (1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 4, 3, 5, 8, 7, 6, 9), (1, 2, 5, 4, 3, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 5, 4, 3, 8, 7, 6, 9), (1, 7, 3, 4, 5, 6, 9, 8, 2), (1, 7, 3, 4, 5, 8, 9, 6, 2), (1, 7, 4, 3, 5, 6, 9, 8, 2), (1, 7, 4, 3, 5, 8, 9, 6, 2), (1, 7, 5, 4, 3, 6, 9, 8, 2), (1, 7, 5, 4, 3, 8, 9, 6, 2), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9), (6, 2, 4, 3, 5, 1, 7, 8, 9), (6, 2, 5, 4, 3, 1, 7, 8, 9), (6, 7, 3, 4, 5, 1, 9, 8, 2), (6, 7, 4, 3, 5, 1, 9, 8, 2), (6, 7, 5, 4, 3, 1, 9, 8, 2).

Задача 5

Пусть (a_0,b_0,c_0) – начальное (и нам неизвестное) состояние замка. Чтобы гарантированно открыть замок, мы должны суметь добавить к начальному состоянию каждую из тысячи комбинаций: (0,0,0), (0,0,1), (0,0,2),…, (9,9,9). Действовать будем так. Хотим к состоянию замка добавить, например, комбинацию (4,0,2). Для этого приложим карту I два раза, и замок перейдет в состояние (a_0+4,b_0,c_0+2). Если замок не открылся, то приложим карту I еще 8 раз, и замок вернется в начальное состояние (a_0,b_0,c_0). Подобным же образом (возвращаясь каждый раз в начальное состояние) мы должны суметь добавить и все остальные комбинации.

Отметим следующее:

- одну и ту же карту не имеет смысла прикладывать более 9 раз. От порядка прикладывания карт ничего не зависит;
- без карты II обойтись не удастся, поскольку у остальных карточек последняя цифра четная;
- двух карт не хватит. Действительно, прикладывая каждую из двух карт от 0 до 9 раз, мы сумеем добавить к начальному состоянию не более 100 различных комбинаций.

Выясним, можно ли открыть замок наборами карт (I,II,III), (I,II,IV) и (VI,II,III).

Набор (I,II,III). Первую карту приложим A_1 раз, вторую – A_2 раза, третью – A_3 раза. Здесь $A_i \in \{0,1,2,...,9\}$. Надо проверить, разрешима ли относительно A_1, A_2, A_3 система (везде далее равными считаем числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 10)

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь d_1, d_2, d_3 – произвольный набор цифр. Таких наборов 1000 штук. Значит и левая часть тоже должна принимать 1000 значений. Поскольку каждое A_i принимает всего 10 значений, число значений левой части не превосходит 1000. Чтоб их было 1000 ровно, необходимо и достаточно, чтоб для различных наборов цифр A_1, A_2, A_3 получались различные левые части. Это, в свою очередь, эквивалентно следующему условию

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_i = 0, i = 1,2,3.$$

Но это не так. Достаточно взять $A_1 = 7, A_2 = 2, A_3 = 1$. Значит карты (I,II,III) не годятся.

Наборы (I,II,IV) и **(VI,II,III)**. Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенства

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

верны, только когда все A_i равны нулю. Значит эти наборы карт подойдут.

Ответ: (I,II,IV) и (VI,II,III).

Задача 6

Попробуем прочитать полученное сообщение. Для этого разобьём его на группы по пять знаков и произведём обратную замену в соответствии с таблицей:

0100000100010001001000101000100010001110011000110101110011000010110000110001111011100110101110000010011100100110011010110100010110001 01

И Д И Т Е В Д О М Н О М Е Р Ш Ю Ь Ъ …

Видимо начала нечитаемого текста приходиться на тот момент, когда отвлекли агента. Попробуем читать буквы сообщения с конца, чтобы определить место разрыва:

0100000100010001001000101000100010001110011000110101110011000010110000110001111011100110101110000010011100100110011010110100010110001 01

… Ж В Ш М П О Н О В О Й У Л И Ц Е

Совмещая полученную информацию получим такое сообщение:

И Д И Т Е В Д О М Н О М Е Р *1100*П О Н О В О Й У Л И Ц Е

Теперь нам необходимо понять, сколько и какие знаки пропущены. Для этого используем информацию об отставании часов. Фраза «часы отстали на 85 секунд» говорит нам, что в сообщение встречается 85 нулей. Агент записал 76нулей. Значит среди пропущенных знаков встречается 9 нулей. Также мы знаем, что пропущено слово, обозначающее номер дома. Чтобы не перебирать все числительные, посмотрим на кусочек 1100 и слова, которые могут его содержать. Момент, когда отвлекли агента может быть расположен относительно известного отрезка в любой из звездочек: *1*1*0*0* Запишем в таблицу только те буквы, соответствующие знакам, которые могут встречаться в числительном.

Когда отвлекли	Первая возможная буква числительного	Последняя возможная буква числительного
*1100	-	Ь
1*100	С,Т,Ч,Ш	Ь
11*00	Ш	И, Ь
110*0	Ш	И, Ь
1100*	Ш	-

Значит, нам нужно проверить числительные, оканчивающиеся на Ь.

Число	Запись	Кол-во нулей
ПЯТЬ	01111 11111 10010 11100	6
ШЕСТЬ	11000 00101 10001 10010 11100	14
СЕМЬ	10001 00101 01100 11100	11
ВОСЕМЬ	00010 01110 10001 00101 01100 11100	17
ДЕВЯТЬ	00100 00101 00010 11111 10010 11100	16
ДЕСЯТЬ	00100 00101 10001 11111 10010 11100	15
ОДИННАДЦАТЬ	01110 00100 01000 01101 01101 00000 00100 10110 00000 10010 11100	35

Видим, что количеству нулей (девять пропущенных и два записаных) соответствует число СЕМЬ.
Ответ: ИДИТЕ В ДОМ НОМЕР СЕМЬ ПО НОВОЙ УЛИЦЕ