

XXV

**Межрегиональная олимпиада
школьников по математике и
криптографии**

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ



Москва 2016

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Для проверки корректности номера пластиковой карты, представляющего собой набор из 16 цифр $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16})$, вычисляются контрольные суммы A , B и C :

$$A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16},$$

$$B = x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 7x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15}, \quad C = x_1 + x_2 + x_4 + 7x_5 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + x_{14} + x_{16}.$$

Если все три суммы A , B и C делятся нацело на 10, то номер признаётся корректным. Каких корректных номеров больше и насколько: у которых первые 4 цифры 0 0 0 0 или тех, у которых последние 4 цифры 0 0 0 0?

2. Докажите, что существует натуральное число, кратное 2015, десятичная запись которого имеет вид 12351235...1235 (т.е. образована последовательным повторением фрагмента 1235).

3. Треугольником Паскаля называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится: а) в строке с номером 1024? б) в строке с номером 1050?

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
							...		

4. Рассмотрим множество всех точек плоскости, координаты которых имеют вид $(m+2n, 3m-n)$, где m, n – целые числа. Докажите, что на прямой, проходящей через любые две точки указанного множества, лежит сторона некоторого квадрата, все четыре вершины которого принадлежат этому множеству. Укажите минимальную площадь такого квадрата.

5. Число городов в Криптоландии равно 4^4 . В качестве названий города имеют различные цифровые комбинации вида (a,b,c,d) , где a, b, c и d – целые числа из множества $\{0,1,2,3\}$. Два города, названия которых отличаются одной цифрой, называются *соседними*. Например, города (3201) и (3001) соседние, а (1111) и (3311) – нет. У каждого города есть флаг определенного цвета, причем флаги соседних городов всегда имеют несовпадающие цвета. Власти объявили конкурс на создание системы флагов для городов, имеющей наименьшее возможное число различных цветов. Найдите это наименьшее число. Ответ обоснуйте.

	b	1	2	3	11	12	13
a							
1		-	+	-	-	-	+
2		-	+	+	-	-	-
3		+	-	+	-	+	-
4		+	-	-	-	+	-
5		-	-	-	+	-	+
6		-	-	-	+	-	+
7		-	+	+	-	-	-
8		-	+	+	-	+	-
9		+	-	-	-	+	-
10		+	-	-	+	-	+

6. Чтобы снять деньги с карточки, Алиса в банкомате вводит пин-код (ПК) x_1, x_2, x_3, x_4 – набор из 4-х целых чисел ($0 \leq x_i \leq 9, i=1,2,3,4$). Банкомат зашифровывает введенный ПК по следующему правилу: он случайным образом выбирает целое число x_5 такое, что $10 \leq x_5 \leq 15$, а затем формирует зашифрованный пин-код (ЗПК) y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 по формулам: $y_1 = f(r_{16}(x_1 + 3 \cdot y_0))$, $y_2 = f(r_{16}(x_2 + 3 \cdot y_1))$, $y_3 = f(r_{16}(x_3 + 3 \cdot y_2))$, $y_4 = f(r_{16}(x_4 + 3 \cdot y_3))$, $y_5 = f(r_{16}(x_5 + 3 \cdot y_4))$, где $y_0 = 2$, $r_{16}(x)$ – остаток от деления числа x на 16, а f – некоторое правило, по которому одно целое число от 0 до 15 заменяется на другое (возможно, то же самое) целое число от 0 до 15, причем разные числа заменяются разными. После этого ЗПК отправляется на сервер, где он расшифровывается (т.е. по присланным числам y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 вычисляются x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5), и, если x_5 не удовлетворяет неравенству $10 \leq x_5 \leq 15$, то сервер выдает сообщение об ошибке. Известно, что для

XXV Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

ПК Алисы был сформирован следующий ЗПК: 13,13,1,11,7. Известно также, что хакеры пытались отсылать на сервер (напрямую, минуя банкомат) в качестве y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 комбинации чисел вида $0, 0, 0, a, b$. Результаты их попыток приведены в таблице (знак “+” – сервер не выдал сообщение об ошибке, знак “-” – выдал). Какой ПК у Алисы?