

**XXV**

**Межрегиональная олимпиада  
школьников по математике и  
криптографии**

**УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ**



**Москва 2016**

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача 1

При повороте диска на месте четных чисел вновь оказываются четные, а на месте нечетных – нечетные. Поэтому открыть замок нельзя.

**Ответ:** Такими поворотами открыть замок нельзя.

### Задача 2

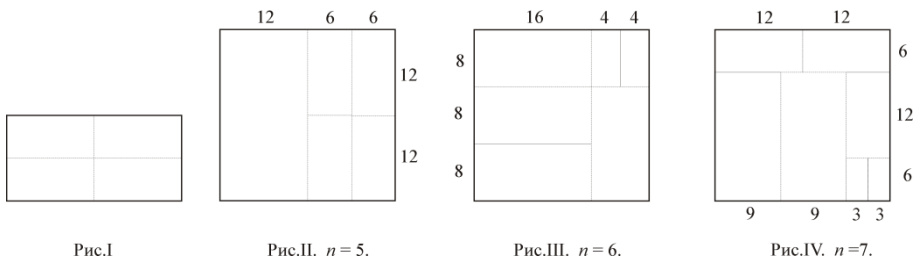
Лента исписана полностью, а при ее намотке было сделано целое число оборотов. Это означает, что текст был по сути вписан в ячейки прямоугольной таблицы. Причем таблица оказалась заполненной полностью. В тексте 81 буква. Значит, стоит попробовать вписать зашифрованный текст (по столбцам сверху вниз) в таблицы размером  $3 \times 27$ ,  $27 \times 3$  и  $9 \times 9$ . Осмысленный текст (при чтении по строкам) получается в последнем случае.

**Ответ:** Зову тебя не для того, Чтоб укорять людей, чья злоба Убила друга моего, Иль чтоб изведать тайны гроба.

з	о	в	у	т	е	б	я	н
е	д	л	я	т	о	г	о	ч
т	о	б	у	к	о	р	я	т
ь	л	ю	д	е	й	ч	ь	я
з	л	о	б	а	у	б	и	л
а	д	р	у	г	а	м	о	е
г	о	и	л	ь	ч	т	о	б
и	з	в	е	д	а	т	ь	т
а	й	н	ы	г	р	о	б	а

### Задача 3

Если квадрат уже разрезан на  $k$  прямоугольников с отношением сторон 2:1, то его можно разрезать и на  $k+3$  таких прямоугольников. Действительно, для этого достаточно один из этих  $k$  прямоугольников, разрезать на четыре прямоугольника, у каждого из которых стороны также относятся как 2:1 (Рис. I). Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что квадрат можно разрезать на  $n=5, 6$  и  $7$  прямоугольников указанного вида. Соответствующие линии разреза приведены на Рис. II–IV. Для удобства сторона квадрата принята равной 24.



### Задача 4

Обозначим через  $r_{32}(a)$  остаток от деления числа  $a$  на 32. Вычислим несколько первых членов последовательности  $y_1, y_2, \dots$ :

$$y_2 = 4y_1 + 23, \quad y_3 = 4(4y_1 + 23) + 23 = 16y_1 + 5 \cdot 23, \quad y_4 = 64y_1 + 21 \cdot 23.$$

Далее  $r_{32}(y_4) = r_{32}(21 \cdot 23) = 3$ , а значит  $r_{32}(y_5) = r_{32}(4y_4 + 23) = r_{32}(4 \cdot 3 + 23) = 3$ . То есть, начиная с четвертого номера, все члены последовательности  $r_{32}(y_n)$  равны 3. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  – числовые значения букв искомого слова. Чтобы найти  $x_4$  надо решить уравнение  $r_{32}(y_4 x_4) = 13$ . Заметим, что  $r_{32}(y_4 x_4) = 13 \Leftrightarrow r_{32}(3x_4) = 13 \Leftrightarrow r_{32}(11 \cdot 3x_4) = r_{32}(11 \cdot 13) \Leftrightarrow r_{32}(x_4) = 15 \Rightarrow x_4 = 15$ . Следовательно, четвертая буква слова – П. Аналогично находятся числовые значения букв  $x_5, \dots, x_{12}$ . В итоге, искомое слово принимает вид \*\*\*ПТОГРАФИЯ. Ответ легко угадывается.

**Ответ:** КРИПТОГРАФИЯ.

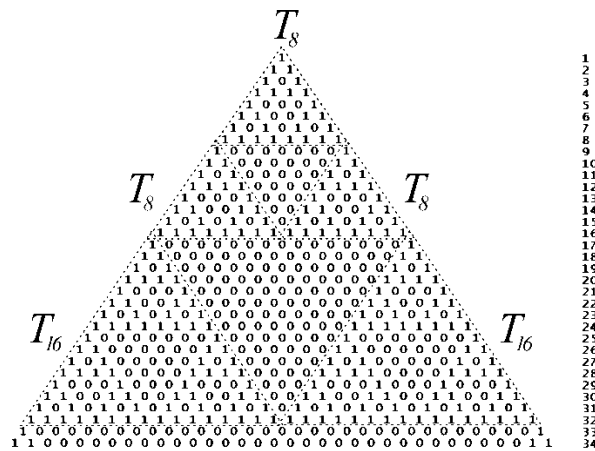
**Задача 5**

Пусть сейчас карточки выложены в каком-то порядке. Пару карточек будем называть *беспорядком*, если у левой карточка номер больше, чем у правой. Например, для пяти карточек 1,2,5,4,3 имеется три беспорядка: (5,4), (5,3), (4,3). В исходном расположении карточек на столе число беспорядков равно нулю. Перекладывая тройку карточек указанным в условии способом, мы число беспорядков изменяем на некоторое четное число. Значит количество беспорядков всегда должно оставаться четным. Но, если карточки выложены в обратном порядке, то число беспорядков равно  $10+9+\dots+1$ , то есть нечетно.

**Ответ:** Нельзя.

**Задача 6**

Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что  $0+0=1+1=0$ ,  $1+0=0+1=1$ . Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим  $T_8$ .



В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников  $T_8$ , которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образуются два треугольника  $T_{16}$ , которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника  $T_{32}$  и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц. Понятно, что, после строки 64, идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 36 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 100 исходного (большого) треугольника, т.к.  $100=64+36$ . Значит единиц в строке 100 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 36. В свою очередь единиц в строке 36 вдвое больше, чем в строке 4 (рассмотреть треугольники, формирующиеся после строки 32), то есть 8 штук. Значит в строке 100 их 16. Остальные 84 – нули.

**Ответ:** 84.