XXV
Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2016

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

При повороте диска на месте четных чисел вновь оказываются четные, а на месте нечетных – нечетные. Поэтому открыть замок нельзя.

Ответ: Такими поворотами открыть замок нельзя.

Задача 2

Лента исписана полностью, а при ее намотке было сделано целое число оборотов. Это означает, что текст был по сути вписан в ячейки прямоугольной таблицы. Причем таблица оказалась заполненной полностью. В тексте 136 букв, и $136=2^3\cdot 17$. Значит, стоит попробовать вписать зашифрованный текст (по столбцам сверху вниз) в таблицы размеров типа 4×34, 8×17 и 17×8. Осмысленный текст (при чтении по строкам) получается в последнем случае.

н	а	ш	а	в	е	т	х
а	я	л	а	ч	у	ж	к
а	и	п	е	ч	а	л	ь
н	а	и	т	е	м	н	а
ч	т	о	ж	е	т	ы	м
о	я	с	т	а	р	у	ш
к	а	п	р	и	у	м	о
л	к	л	а	у	о	к	н
а	и	л	и	б	у	р	и
з	а	в	ы	в	а	н	ь
е	м	т	ы	м	о	й	д
р	у	г	у	т	о	м	л
е	н	а	и	л	и	д	р
е	м	л	е	ш	ь	п	о
д	ж	у	ж	ж	а	н	ь
е	м	с	в	о	е	г	о
в	е	р	е	т	е	н	а

Ответ: Наша ветхая лачужка И печальна и темна. Что же ты, моя старушка, Приумолкла у окна? Или бури завываньем Ты, мой друг, утомлена, Или дремлешь под жужжаньем Своего веретена?

Задача 3

Пусть $r_{10}(a)$ – остаток от деления a на 10, тогда количество корректных номеров есть число решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} r_{10}(A)=0, \\ r_{10}(B)=0, \\ r_{10}(C)=0. \end{cases}$$

Для удобства расположим слагаемые (из вида A, B и C) в таблице:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Если первые 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

	x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Но тогда первая строка есть остаток от деления суммы третьей и второй на 10. Вычитая из первой строки вторую и третью, а затем из второй строки третью, получим, что исходная система равносильна системе (см. приложение)

$$\begin{cases} r_{10}(x_{15})=r_{10}(4x_5-x_6-x_7+x_8-4x_9+x_{10}-x_{11}-x_{12}-x_{13}+x_{14}), \\ r_{10}(x_{16})=r_{10}(-7x_5-x_8-3x_9-x_{10}-x_{14}). \end{cases}$$

Количество решений есть количество способов поставить всеми возможными способами на места переменных $x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ числа $0,1,2,\ldots,9$. Таким образом, число корректных номеров равно 10^{10}.

Если же последние 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}		

В отличие от первого случая, переменные x_1, x_2, x_3 будут линейно выражаться через $x_4, x_6, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. И тогда получим, что число решений системы равно 10^9.

Ответ: в первом случае корректных номеров больше, чем во втором на $10^{10} - 10^9$.

Задача 4

Обозначим через $r_{32}(a)$ остаток от деления числа a на 32. Вычислим несколько первых членов последовательности $y_1, y_2, \ldots$:

$$y_2 = 4y_1 + 25,\ \ y_3 = 4\left(4y_1 + 25\right) + 25 = 16y_1 + 5\cdot 25,\ \ y_4 = 64y_1 + 21\cdot 25.$$

Далее $r_{32}(y_4) = r_{32}(21\cdot 25) = 13,$ а значит $r_{32}(y_5) = r_{32}\left(4y_4 + 25\right) = r_{32}\left(4\cdot 13 + 25\right) = 13.$ То есть, начиная с четвертого номера, все члены последовательности $r_{32}(y_n)$ равны 13. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ – числовые значения букв искомого слова. Чтобы найти x_4 надо решить уравнение $r_{32}(y_4 x_4) = 1.$ Заметим, что $r_{32}(y_4 x_4) = 1 \Leftrightarrow r_{32}(13x_4) = 1 \Leftrightarrow r_{32}(5\cdot 13x_4) = r_{32}(5\cdot 1) \Leftrightarrow r_{32}(x_4) = 5 \Rightarrow x_4 = 5.$ Следовательно, четвертая буква слова – Е. Аналогично находятся числовые значения букв $x_5, \ldots, x_{12}$. В итоге, искомое слово принимает вид ***ЕПЛАВАНИЕ. Ответ легко угадывается.

Ответ: МОРЕПЛАВАНИЕ.

Задача 5

Покажем, что у любых четырех карточек *A*,*B*,*C*,*D* можно изменить порядок их следования на противоположный (точками сверху будем отмечать те карточки, которые собираемся перекладывать):

$$\dot{A}, \dot{B}, C, \dot{D} \to D, \dot{A}, \dot{C}, \dot{B} \to D, \dot{B}, \dot{A}, \dot{C} \to D, C, B, A.$$

Теперь, перекладывая карточки сразу *четверками*, покажем как переложить 13 карточек в обратном порядке:

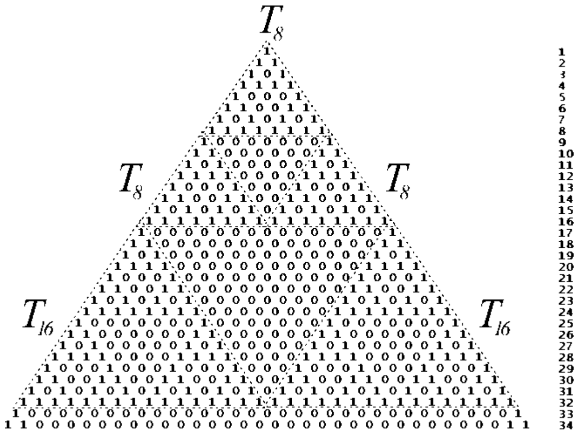
$$\dot{1}, \dot{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dot{12}, \dot{13} \to 13, 12, \dot{3}, \dot{4}, 5, 6, 7, 8, 9, \dot{10}, \dot{11},\ 2, 1 \to$$

$$\to 13, 12, 11, 10, \dot{5}, \dot{6}, 7, \dot{8}, \dot{9}, 4, 3,\ 2, 1 \to 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Ответ: Можно.

Задача 6

Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что 0+0=1+1=0, 1+0=0+1=1. Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим T_8. В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников T_8, которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образовываются два треугольника T_{16}, которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника T_{32} и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц. Поэтому в строке 256 четных чисел нет.



Обратимся теперь к строке 200. Понятно, что, после строки 128 (степень двойки), идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 72 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 200 исходного (большого) треугольника, т.к. 200=128+72. Значит единиц в строке 200 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 72. В свою очередь единиц в строке 72 вдвое больше, чем в строке 8 (рассмотреть треугольники, формирующиеся после строки 64). Количество же 1 в строке 8 можно подсчитать непосредственно – их 8 штук. Значит в строке 200 их 32, остальные 168 – нули.

Ответ: а) 0, б) 168.