

**Условия и ответы на задачи заключительного этапа 2014-15 учебный год  
(11 класс)**

1. Женя решила поделиться забавным *палиндромом* с Ксюшей (палиндром – текст, читающийся одинаково в обоих направлениях. Например: «А роза упала на лапу Азора»). Но чтобы никто о нем больше не узнал, Женя зашифровала его следующим образом: каждую букву палиндрома она заменила числом согласно таблице и в результате получила последовательность чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{29}$ . Затем она взяла последовательность целых чисел  $y_1, y_2, \dots, y_{29}$ , полученных по правилу  $y_i = i \cdot d$ , где  $d$  – некоторое целое число, и вычислила новую последовательность  $r_1, r_2, \dots, r_{29}$ , где  $r_i$  равно остатку от деления на 33 суммы  $x_i + y_i$ . В результате у неё получилось вот что:

**11 30 1 11 7 15 31 5 13 23 21 5 31 12 3 26 26 14 11 27 31 4 11 9 15 0 4 14 9.**

Помогите Ксюше прочесть палиндром.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

**Ответ: голоден носитель лет и сон не долог**

2. Из последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_i \in \{0,1\}$  получена последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  по правилу

$$y_i = x_i \cdot x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

а) *Сколько* различных последовательностей  $y_1, y_2, \dots, y_6$  может быть получено (при выборе всевозможных  $x_1, x_2, \dots, x_7, x_i \in \{0,1\}$ )?

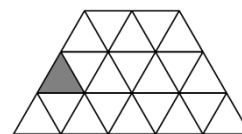
б) *Какие* последовательности  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  не могут быть получены ни при каких  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_i \in \{0,1\}$ ?

**ОТВЕТ:** запрет 101; количество 37

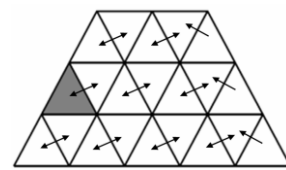
3. Линия связи состоит из 4-х каналов, пронумерованных числами 1,2,3,4. Для передачи по линии сигнала на каждый канал подается свой импульс, величина которого может быть 7, 9, 11, 13 или 15 единиц. В каждом канале есть усилитель, который увеличивает поданный импульс в  $5^{i-1}$  раз, где  $i$  – номер канала. На выходе линии формируется сигнал, который равен остатку от деления на 625 суммы полученных по каналам импульсов. Какие импульсы необходимо подать на каналы, чтобы получить сигнал, величиной 57 единиц?

**Ответ:** 7,15,9,13.

4. В каждой треугольной ячейке (см. рис.) сидит по кузнечику. Одновременно все кузнечики перепрыгивают в какую-либо соседнюю по стороне ячейку (например, серая ячейка граничит по стороне с двумя ячейками). При этом в одной ячейке могут оказаться несколько кузнечиков. Каково *минимальное* количество ячеек, в которых не окажется *ни одного* кузнечика? Ответ обоснуйте.



**Решение:** Заметим, что ячейки подразделяются на два типа: ячейки "острием вверх" ( $\blacktriangle$ ) и ячейки "острием вниз" ( $\blacktriangledown$ ). Перепрыгивая, кузнечик попадает из ячейки ( $\blacktriangle$ ) в ячейку ( $\blacktriangledown$ ) и наоборот. Ячеек типа ( $\blacktriangle$ ) на 3 больше, чем ячеек ( $\blacktriangledown$ ). Поэтому, по крайней мере три ячейки окажутся пустыми. Чтобы обосновать, что ответ в задаче именно 3, укажем (см. рисунок) один из возможных способов перемещения кузнечиков, при котором освобождаются ровно 3 ячейки.

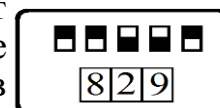


**Ответ:** 3

7. Для доступа на сайт Алиса вводит в строке браузера его имя. Затем это имя по сети отправляется на специальный DNS-сервер, который по имени сайта определяет его IP-адрес – набор из четырех целых чисел  $x_1.x_2.x_3.x_4$ , причем  $0 < x_i < 255$ ,  $i=1,2,3,4$ . Этот IP-адрес сервер отправляет Алисе. Чтобы защитить передаваемый адрес от подделки, сервер вместе с адресом передает число  $s$ , которое он вычисляет так:  $s = r_{323}((h_4)^d)$ , где  $d$  – секретное натуральное число, известное только Алисе и серверу, а  $r_{323}(x)$  – остаток от деления числа  $x$  на 323; число  $h_4$  находится последовательным применением правила  $h_i = r_{323}((h_{i-1})^2 \cdot x_i)$ , где  $i$  принимает значения 1,2,3,4, а  $h_0 = 123$ . Получив IP-адрес, Алиса также вычисляет  $s$  и, если оно совпадает с присланным сервером значением, Алиса признает этот IP-адрес подлинным. Злоумышленник узнал, что на запрос Алисы сервер ответил: 192.168.2.5 при  $s=130$ . Он хочет от имени сервера отправить Алисе ложный (отличающийся от исходного) адрес вида 192.168. $a.b$  и такое число  $s'$ , чтобы этот адрес Алиса признала подлинным. Найдите хотя бы одну такую тройку  $a,b,s'$  с условием  $s' \geq 1$ .

**Ответ, возможный вариант:** 192.168.7.7 с исходным значением  $s$ .

8. Для проведения расследования оперативным работникам необходимо попасть в игровой зал подпольного казино, который открывается с помощью электронных устройств А и В, расположенных в разных помещениях. Один из оперативников в промежуток времени с 6.00 до 7.15 может получить доступ к устройству А, а другой, в то же самое время, – к устройству В. До начала операции известно следующее. **1.** На лицевой панели каждого устройства имеется 5 тумблеров, принимающих положения «0» или «1», а также трёхразрядное десятичное табло (см. рис.). **2.** Каждому положению тумблеров соответствует своё *уникальное для данного устройства* трёхзначное число на табло. Соответствие положений тумблеров числам и сами числа неизвестны. **3.** Тумблеры можно



установить в такие положения, что числа на табло обоих устройств совпадут. **В этом и только в этом случае дверь в игровой зал откроется.** 4. Находясь в

номер страницы: 0023

001100

помещениях, оперативники смогут общаться, **только** пересылая друг другу по пневмопочте имеющийся в их распоряжении специальный блокнот на 1001 страницу. 5. Страница блокнота (см. рис.) позволяет вписывать в отведенные 5 позиций цифры 0 или 1. Никакие другие манипуляции со страницами технически невозможны. 6. Известно, что между переключением тумблеров и появлением соответствующего трёхзначного числа на табло проходит ровно 1 минута. В этот промежуток времени оперативник сможет отыскать в блокноте страницу по ее номеру, произвести на ней запись или прочитать ее содержимое. Провести манипуляции с большим числом страниц за одну минуту технически невозможно. 7. Время пересылки блокнота по пневмопочте – 3 минуты. Как в отведенное время открыть дверь?

Примечание: Рисунки лишь поясняют условие задачи. Не следует думать, что страницу 23 надо заполнять именно так, и что такому положению тумблеров соответствует число 829.

**Решение:** Пусть, для определенности, блокнот сначала находится у оперативника, работающего с устройством А. За 33 минуты он перебирает все комбинации выключателей и записывает эти комбинации на страницах блокнота. Каждую комбинацию он пишет на странице с тем номером, который высветился на трехразрядном табло. То есть, если при положении тумблеров, скажем, 11010, высветилось на табло 755, то на странице 755 блокнота он и пишет 11010. Затем, заполненный блокнот оперативник А отправляет оперативнику В.

В итоге, в 6.36 оперативник В блокнот получает и начинает перебирать все 32 комбинации тумблеров у себя, при этом сверяясь с блокнотом, а именно: сначала выставляет комбинацию 00000; через минуту на табло загорается, скажем, 120. Он, затем, выставляет 00001 и проверяет заполнена ли страница 120 в блокноте и т.д. Как только заполненная страница, с некоторым номером **n**, найдется (а, по условию, она найдется обязательно), он вписывает ее содержимое на страницу с номером 1001, а тумблеры выставляет так, чтоб на табло горело это **n**. На это у оперативника В уйдет не более 34 минут.

Самое позднее в 7.13, оперативник А получает блокнот обратно. На странице 1001 записано положение тумблеров, при котором уже на табло его устройства загорится **n**. Ему остается открыть блокнот на странице 1001, прочитать ее содержимое и выставить тумблеры. Не позднее 7.15 на его табло тоже высветится **n**, и дверь откроется.

В заключении отметим, что общее время можно еще уменьшить. Действительно, 1) когда оперативники попали в помещения, тумблеры там уже в каком-то положении стояли, 2) оперативнику А достаточно вписать в блокнот лишь 31 комбинацию, т.к. если ни по одной из них оперативник В совпадений не найдет, то оставшаяся 32-ая будет искомой (страницу 1001 он оставит пустой).