Условия и ответы на задачи заключительного этапа 2013-14 учебный год

Задача 1.

На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: **1** сек., **2** сек., **3** сек., **4** сек., **5** сек., **6** сек. Известно, что в ходе бегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз, и что каждый робот всегда бегал с одной и той же скоростью. Определите число представленных на бегах механизмов, а также время прохождения дистанции каждым из них, если лучшее время прохождения дистанции было равно 30 секундам.

Ответ: 30, 32, 35, 36 или 30, 31, 34, 36.

Задача 2.

В таблицу, состоящую из n строк и m столбцов, записали числа (не обязательно целые) так, что сумма элементов в каждой строке равна 408, а сумма элементов в каждом столбце равна 340. После чего к таблице приписали k столбцов, сумма элементов в каждом из которых равна 476, и столбец, сумма элементов в котором равна 272. Получили таблицу, в которой сумма элементов в каждой строке равна 544. Найдите числа n, m и k, при которых выражение $2n - 3m + 6k$ принимает *наименьшее возможное натуральное* значение. При найденных параметрах n, m и k приведите пример указанной таблицы.

Ответ: 4 при $n = 65,\ m = 78,\ k = 18$.

Задача 3.

Винтик и Шпунтик используют следующую систему шифрования. Исходный текст, записанный без пробелов, разбивается последовательно на части по 10 букв. В каждой части буквы нумеруются слева направо от 1 до 10 и затем переставляются по правилу, которое задаётся таблицей 1.

Табл.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	9	8	1	3	2	4	10	6	5

То есть, первая буква каждой части ставится на 7 место, вторая – на 9 место и т.д. Однажды Винтик собрался отправить сообщение Шпунтику. Он его зашифровал, а потом, для пущей надежности, зашифровал полученный текст еще раз. Подумал, и зашифровал его еще 333 раза. В результате Шпунтик получил вот такое сообщение: «**сьтуемнсеяиклеонкасо**». Помогите Шпунтику его прочитать.

Ответ: У МЕНЯ ЕСТЬ СЕНОКОСИЛКА.

Задача 4.

Функции $f_0(x), f_1(x), \dots, f_6(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3\}$ и областью значений $\{0,1,2,3\}$ заданы таблицами (табл.2). *Табл.*

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	0	3	2	1	0	0	0
1	1	0	3	3	2	2	1
2	2	1	0	2	1	3	3
3	3	2	1	0	3	1	2

(а) для функции $f(x)$, заданной равенствами $f(0) = 3,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2,$ $f(3) = 0$ подберите различные числа $a, b, c \in \{0,1,\dots,6\}$ такие, чтобы соотношение

$$f(x) = f_c\left(f_b\left(f_a(x)\right)\right) \qquad (1)$$

выполнялось для всех $x = 0,1,2,3$;

(б) докажите, что для любой функции $f(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3\}$ и областью значений $\{0,1,2,3\}$, переводящей разные элементы в разные, найдутся числа $a, b, c \in \{0,1,\dots,6\}$ (не обязательно различные) при которых выполнено равенство (1).

Ответ: (а) $a = 3, b = 5, c = 6$.

Задача 5.

Разблокировка коммуникатора осуществляется вводом 4-значного числового кода на сенсорном экране. На клавиатуре первоначальная расстановка цифр после ввода кода меняется в зависимости от случайного простого числа k от 7 до 2017, и на месте цифры i отображается значение a_i, равное последней цифре числа $i \cdot k$. Пользователь вводит цифры из левой колонки левой рукой, а остальные правой. Восстановите код блокировки, если известно, что при наборе кода пользователь вводил цифры следующим образом:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

$\longrightarrow$

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9
	a_0	

— при $a_3 = 3$: левой, правой, правой, правой;
— при $a_3 = 9$: правой, правой, левой, левой;
— при $a_3 = 1$: левой, левой, правой, правой;
— при $a_3 = 7$: правой, правой, левой, правой.

Ответ: 7832.

Задача 6.

Для шифрования сообщения из 13 букв на русском языке проделали следующие действия: 1) преобразовали последовательно буквы сообщения с помощью таблицы (рис.1) в цепочку чисел $x_1, x_2, \dots, x_{13}$; 2) выбрали (секретное) натуральное число k_1 и дописали сумму $x_{14} = x_1 + x_2 + \dots + x_{13} + k_1$ к цепочке справа; 3) в расширенной цепочке $x_1, x_2, \dots, x_{13}, x_{14}$ числа x_i заменили числами y_i по формулам: $y_i = 2x_i + x_{i+1} + (-1)^{\frac{i+1}{2}} k_1$, если i нечетное и $y_i = x_{i-1} + x_i + (-1)^{\frac{i}{2}} k_2$, если i четное, где k_2 еще одно (секретное) натуральное число; 4)

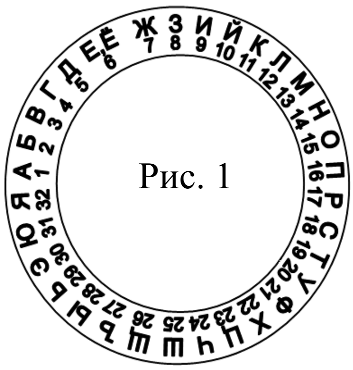

Рис. 1

каждое y_i заменили его остатком от деления на 32. В результате получили вот что: **20, 31, 12, 11, 6, 9, 5, 9, 14, 27, 9, 10, 11, 16.** Найдите исходное сообщение.

Ответ: ЗОНД ПРИЗЕМЛЕН.

Критерии определения призёров и победителей заключительного этапа 2013-14 учебный год

Каждая задача очного этапа олимпиады оценивалась по 4-х балльной системе (от 0 до 3-х баллов). Полностью решённая задача оценивалась в 3 балла.

-*1 место* - не менее 5 полностью решённых задач;

-*2 место* - не менее 4 полностью решённых задач или не менее 14 баллов;

-*3 место* - не менее 3 полностью решённых задач или не менее 10 баллов.