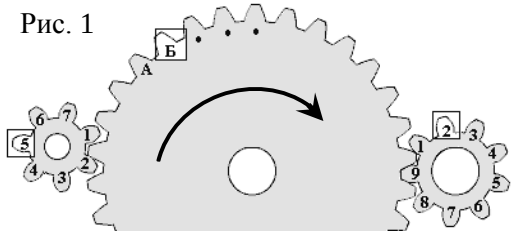
X X I
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

11 КЛАСС
ВАРИАНТ 1

1. Для шифрования сообщения использовалось устройство из трёх последовательно зацепленных шестерёнок с 7, 30 и 9 зубцами (рис.1). На зубцах первой шестерёнки записаны цифры от 1 до 7, а на третьей – от 1 до 9. На второй шестерёнке также по часовой стрелке записан тридцатибуквенный алфавит: **АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЫЬЭЮЯ.** Для каждой шестерёнки выделено окошко (на рис.1 оно изображено квадратиком), в котором видна лишь одна буква или цифра. Сообщение шифровалось побуквенно: вторая шестерёнка вращалась по часовой стрелке, пока в окошке не появится первая буква сообщения. Затем выписывалась пара цифр, открывшихся в окошках первой и третьей шестерёнок. Далее продолжали вращать вторую шестерёнку до появления второй буквы сообщения, выписывали пару цифр из окошек и т. д. Так для случая, приведенного на рис.1, буква **Б** заменяется парой **52** (подчеркнем, что рисунок лишь поясняет принцип работы устройства, и на самом деле букве **Б** может соответствовать другая пара цифр). Начальное взаимное расположение шестерёнок неизвестно. Найдите по известным выписанным парам цифр

Рис. 1



37 22 51 78 46 68 75 56 37 49 36 26 66 19 79 18 73

какое сообщение было зашифровано (пробелы в тексте сохранены).

2. Милла и Стелла разговаривают по телефону и хотят выбрать секретное число так, чтобы оно осталось неизвестным постороннему, возможно подслушивающему разговор. Для этого Милла подбирает натуральное число $a \le 256$ такое, что числа $r_{257}(a^i)$ – различны при всех $1 \le i \le 256$ и $r_{257}(a^{256}) = 1$, например 3,5,6,7,10,12, где $r_{257}(t)$ – остаток от деления числа t на 257. Затем Милла загадывает натуральное число $x \le 256$, а Стелла – натуральное число $y \le 256$. После этого Милла сообщает числа a и $r_{257}(a^x)$ Стелле, а Стелла ей – число $r_{257}(a^y)$. Теперь они обе вычисляют их секретное число $r_{257}(a^{xy+1})$. Найдите его, если известно, что $a = 10$, $r_{257}(a^x) = 16$, $r_{257}(a^y) = 113$.

3. Каждое из чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ принимает значение либо 0, либо 1. Известно, что числа $x_1x_6 + x_2x_5 + x_5x_6$, $x_2x_5x_6 + x_3x_4 + x_2$, $x_4x_6 + x_2 + x_3$, $x_2x_5x_6 + x_2x_4 + x_1x_6$, $x_2x_5 + x_4x_6 + x_1$ чётны, а число $x_2x_4 + x_2x_5 + x_2$ – нечётно. Найдите все варианты для $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

4. Для шифрования SMS-сообщений использовался следующий способ. Выбиралось секретное осмысленное трёхбуквенное слово. Каждый пробел в сообщении заменялся очередной буквой секретного слова: первый – на первую, второй – на вторую, третий – на третью, четвёртый – снова на первую и т.д. Затем полученная цепочка букв набиралась на клавиатуре с использованием интеллектуального ввода (по типу T9). При этом при вводе каждой буквы осуществлялось лишь однократное нажатие соответствующей клавиши (см. рис.2), а программа интеллектуального ввода выбирала слово из словаря по следующему принципу: 1-я буква слова выбиралась с 1-й нажатой клавиши, 2-я – со второй и т.д. Полученные таким образом осмысленные слова разделялись запятыми и передавались. Найдите исходное сообщение, соответствующее написанному на экране (рис.2).

Рис. 2

5. Перед записью в память сервера пароли пользователей системы преобразуются. Сначала обрабатывается 1-я и 2-я буква пароля, затем 2-я и 3-я и т.д. Пара букв представляется набором, состоящим из двенадцати битов $x_1, \ldots, x_{12}$, первые шесть из которых соответствуют первой букве, а вторые шесть – второй согласно табл.1.

Табл. 1

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

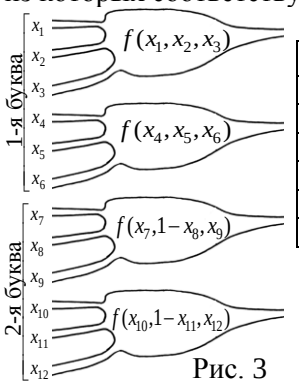


Рис. 3

Биты получившегося набора подаются на четыре одинаковых логических элемента (рис.3). На вход каждого их них поступает три бита, а на выходе формируется значение $f(x, y, z)$ равное 1, если среди битов x, y, z больше единиц, чем нулей, иначе формируется значение 0. В память сервера для каждой пары букв записывают четыре бита: ($f(x_1, x_2, x_3)$, $f(x_4, x_5, x_6)$, $f(x_7, 1-x_8, x_9)$, $f(x_{10}, 1-x_{11}, x_{12})$). Определите осмысленный пароль, если в памяти компьютера он хранится в следующем сжатом виде: $(0,0,0,0)$, $(1,0,1,1)$, $(0,0,0,1)$, $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$.

6. В треугольнике ABC известно: BC=3, AC=1, угол ACB равен 120^0. Точки M и K удовлетворяют условиям: AM : MC = 2:3, BK : CK = 1:3. Найдите максимально возможное расстояние между точками M и K.