РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
XX МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

11 КЛАСС

Решение задачи 1. По двум последним текстам можно восстановить обратную перестановку и использовать ее для расшифрования первого сообщения. Из-за повторов букв в этих сообщениях сделать это однозначно удаётся не всегда.

Таким образом, задача сводится к выбору букв из столбцов глубины не более 3-х, которые дают осмысленное сообщение. Жирным цветом выделены выбранные буквы, в серых клетках отмечены уже использованные буквы, не участвующие в выборе.

и	к	л	м	н	о	и	к	л	м	н	о	и	к	л	м	н	о	с	т
о	к	л	с	и	л	н	и	к	т	и	о	к	м	о	м	л	н	м	н
варианты обратной перестановки																			
6	2	3	19	1	3	5	1	2	20	1	6	2	4	6	4	3	5	4	5
12	8	9	19	7	9	11	7	8	20	7	12	8	10	12	10	9	11	10	11
18	14	15	19	13	15	17	13	14	20	13	18	14	16	18	16	15	17	16	17
варианты открытого текста																			
е	р	**т**	е	о	т	з	**о**	**р**	о	о	е	р	к	**е**	к	т	**з**	**к**	з
и	**е**	е	**е**	з	е	и	з	е	**о**	**з**	**и**	е	р	и	**р**	**е**	и	р	**и**
м	т	ь	е	**л**	**ь**	**м**	л	т	о	л	м	**т**	**б**	м	б	ь	м	б	м

Ответ к задаче 1: метель морозит березки.

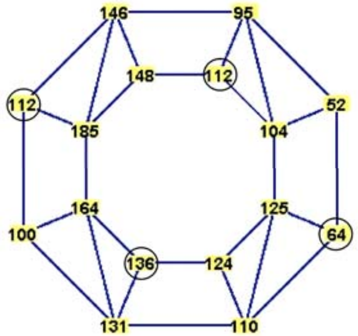
Решение задачи 2. Обозначим $y = 53055487$, $N = p \cdot q = 58303801$. По условию задачи $НОД(x, N) = p > 1$, то есть $x = t_1 \cdot p$, t_1 – натуральное число. Так как $y = r_N(x^3)$ (r_N – остаток от деления на N), то также $НОД(y, N) = p$. Тогда $y = t_2 \cdot p$ (t_2 – натуральное). Делим обе части уравнения $y = r_N(x^3)$ на p, получаем: $t_2 = r_q\left(t_1^3 \cdot p^2\right)$. Значения p, q подобраны так, что $r_q\left(p^2\right) = 1$, а t_1 – небольшое. Поэтому $x = \sqrt[3]{t_2} \cdot p$. В итоге имеем: $p = 10799$, $q = 5399$, $t_1 = 17$.

Ответ к задаче 2: $x = 183583$.

Решение задачи 3. Сравним посимвольно последовательности цветов, приведённые в условии. На каждой позиции возможны четыре варианта: совпали или нет буквы цвета, сработал или нет датчик у Шапокляк: - цвета не совпали, датчик не сработал, тогда в этой позиции кодовой комбинации Гена выставит черный цвет или цвет, выбранный Чебурашкой (2 варианта); - цвета совпали, датчик сработал, тогда знаем, что Гена выставит тот же цвет (1 вариант); - цвета совпали, датчик не сработал или цвета не совпали, но датчик сработал, тогда Гена выставит черный цвет (1 вариант). Тогда ответом будем число $4^{20} - 2^k$, где k – число позиций, где цвета не совпали, но датчик не сработал. **Ответ к задаче 3:** $4^{20} - 2^{11}$.

С	К	З	З	З	К	С	К	С	З	С	К	К	З	С	К	З	К	З	К	Чебурашка
С	С	З	К	З	К	К	З	З	З	К	С	С	К	К	З	С	З	С	К	Шапокляк
					*				*	*			*			*		*		Сработка датчика
Ч		Ч		Ч	К				З	Ч			Ч			Ч		Ч		Гена

Решение задачи 4. Граф, используемый в задаче, обладает следующим свойством: из множества всех его вершин можно выделить такое подмножество V (отмеченное на рисунке кружочками), что любая вершина графа лежит в окрестности ровно одной вершины из V. Окрестностью вершины графа называют множество соседних с ней вершин, включая ее саму. Очевидно, что искомое число равно сумме чисел, расположенных в вершинах из множества V: 112+112+64+136=424. **Ответ к задаче 4:** 424.



Решение задачи 5. Составим, исходя из условия задачи, систему неравенств и запишем её в виде двух подсистем. Из исходной системы получаем:

$$\begin{cases} 0 < c \\ a_4 \geq c \\ a_3 < c \\ a_3 + a_4 \geq c \\ a_2 < c \\ a_2 + a_4 < c \\ a_2 + a_3 < c \\ a_2 + a_3 + a_4 < c \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 \geq c \\ a_1 + a_4 \geq c \\ a_1 + a_3 < c \\ a_1 + a_3 + a_4 \geq c \\ a_1 + a_2 < c \\ a_1 + a_2 + a_4 \geq c \\ a_1 + a_2 + a_3 < c \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq c \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a_1 \geq c \\ a_1 + a_3 < c \end{cases} \Rightarrow a_3 < 0, \quad \begin{cases} a_2 + a_4 < c \\ a_3 + a_4 \geq c \end{cases} \Rightarrow a_2 < a_3,$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 < c \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq c \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_4 > 0.$$

Подбираем некоторые целые числа, удовлетворяющие этим соотношениям. Например: $a_3 = -1$, $a_2 = -2$, $a_4 = 3$. Подставляем их в первую подсистему, тогда $1 < c \leq 2$. Полагаем $c = 2$ и подставляем во вторую подсистему, получаем $2 \leq a_1 < 3$, пусть $a_1 = 2$. **Ответ к задаче 5:** $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = 3$, $c = 2$.

Решение задачи 6. Сначала заметим, что после первого оборота количество дуг равно 2^2, после второго – 2^3, после последнего – 2^{n+1}. Пусть после оборота с номером k, $1 \leq k \leq n$ в точках деления окружности на дуги стоят числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}}$. Тогда в ходе оборота с номером $k+1$ на окружности появятся следующие новые числа $y_1 = 6x_1 + x_2, y_2 = 6x_2 + x_3, \ldots, y_{2^{k+1}} = 6x_{2^{k+1}} + x_1$. Видно, что $\sum_{i=1}^{2^{k+1}} y_i = 7 \cdot \sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i$. Значит, после $k+1$ оборота сумма всех чисел на окружности возрастет в 8 раз. Если учесть, что первоначальная сумма чисел на окружности равнялась 5, то получаем окончательный ответ. **Ответ к задаче 6:** $5 \cdot 8^n$