X I X

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

11 КЛАСС
ВАРИАНТ 1

1. Известно, что число $N=203060593$ является произведением двух простых чисел p и q, а количество натуральных чисел, меньших N и взаимно простых с N, равно 203030388. Найдите числа p и q.

2. Известно, что три числа a_1,a_2,a_3 были получены так: сначала выбрали натуральное число A и нашли числа $A_1=\left[A\right]_{16},\ A_2=\left[A/2\right]_{16},\ A_3=\left[A/4\right]_{16}$, где $\left[X\right]_{16}$ – остаток от деления целой части числа X на 16 (например, $[53/2]_{16}=10$). Затем было выбрано целое число B такое, что $0\le B\le 15$. Числа A_1,A_2,A_3 и B записывают в двоичной системе счисления, т.е. представляют каждое из них в виде цепочки из 0 и 1 длины 4, приписывая слева необходимое число нулей. Такие цепочки условимся складывать посимвольно «в столбик» без переносов в следующий разряд согласно правилу: $1+1=0+0=0$ и $0+1=1+0=1$, а саму операцию посимвольного сложения обозначим как $\oplus$. Например, $3\oplus 14=(0011)\oplus(1110)=(1101)=13$. Положим $a_1=A_1\oplus B,\ a_2=A_2\oplus B,\ a_3=A_3\oplus B$. Найдите все возможные значения числа a_3, если известно, что $a_1=6,\ a_2=10$.

3. Катя и Юра играют в игру «Угадай полубайт!» по следующим правилам: Катя задумывает любую ненулевую четырехразрядную комбинацию, состоящую из нулей и единиц (например, «0011»), а Юра должен ее угадать. За первую названную Юрой комбинацию он отдает Кате столько конфет, сколько единиц в этой комбинации. За каждую последующую называемую комбинацию Юра отдает Кате число конфет, равное числу разрядов, в которых эта комбинация не совпадает с предыдущей им названной. Если Юра угадал, то Катя сразу отдает ему 16 конфет. Как должен играть Юра, чтобы всякий раз гарантированно выигрывать конфеты?

4. Для зашифрования сообщения на русском языке, записанного без знаков препинания и пробелов, используется последовательность натуральных чисел $x_1,x_2,\ldots$, удовлетворяющая соотношению: $x_k=b\cdot 2^{a(k-1)},\ k=1,2,\ldots$ Здесь a и b - фиксированные (но неизвестные) натуральные числа. Зашифрование происходит следующим образом. Первую букву сообщения заменяют числом согласно таблице 1 и складывают с x_1, потом также заменяют вторую букву и складывают с x_2 и т.д. Затем все суммы заменяют остатками от деления на 31, а остатки заменяют буквами согласно таблице 1. В результате получился текст

ЖЯИСУЖЭПОСИЫАГЩЖЧФХСЧНЛУЦБЫЗЮЮЫСЧЗЭУШЕЛМГЫТ

Найдите исходное сообщение, представляющее собой отрывок известного стихотворения, если известно, что в нем есть слово **ЗОЛОТАЯ**.

Таблица 1

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И,Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь,Ъ	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

5. В Криптоландии установлены автоматы по раздаче пирожков, которые при нажатии красной кнопки выдают 9 пирожков, а при нажатии зеленой кнопки – 4. Любую из кнопок можно нажимать сколько угодно раз. Найти все значения для числа пирожков, которые может выдать такой автомат.

6. Найти число решений системы уравнений $\begin{cases} x+|y|=1 \\ y+a|x|=2 \end{cases}$ при всех возможных значениях параметра a.

XIX

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

11 КЛАСС
ВАРИАНТ 2

1. Известно, что число $N = 202718099$ является произведением двух простых чисел p и q, а количество натуральных чисел, меньших N и взаимно простых с N, равно 202687920. Найдите числа p и q.

2. Известно, что три числа a_1, a_2, a_3 были получены так: сначала выбрали натуральное число A и нашли числа $A_1 = [A]_{16}, A_2 = [A/2]_{16}, A_3 = [A/4]_{16}$, где $[X]_{16}$ – остаток от деления целой части числа X на 16 (например, $[53/2]_{16} = 10$). Затем было выбрано целое число B такое, что $0 \le B \le 15$. Числа A_1, A_2, A_3 и B записывают в двоичной системе счисления, т.е. представляют каждое из них в виде цепочки из 0 и 1 длины 4, приписывая слева необходимое число нулей. Такие цепочки условимся складывать посимвольно «в столбик» без переносов в следующий разряд согласно правилу: $1+1=0+0=0$ и $0+1=1+0=1$, а саму операцию посимвольного сложения обозначим как $\oplus$. Например, $3 \oplus 14 = (0011) \oplus (1110) = (1101) = 13$. Положим $a_1 = A_1 \oplus B$, $a_2 = A_2 \oplus B$, $a_3 = A_3 \oplus B$. Найдите все возможные значения числа a_3, если известно, что $a_1 = 9$, $a_2 = 11$.

3. В столице Криптоландии есть метро, станции которого обозначаются всеми возможными сочетаниями из трех цветов: красного, желтого или зеленого. При этом в названии участвуют либо один, либо два разных, либо все три цвета. Кроме того, имеется одна станция с названием «Бесцветная». Таким образом, всего имеется 8 станций. Две станции соединены тоннелем в том и только в том случае, если их названия отличаются между собой наличием только одного цвета. Например, «Бесцветная» и «Желтая» соединены, а «Желтая» и «Красно-зеленая» – нет. Укажите кратчайший маршрут, начинающийся и заканчивающийся на «Бесцветной» и проходящий через все станции.

4. Для зашифрования сообщения на русском языке, записанного без знаков препинания и пробелов, используется последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots$, удовлетворяющая соотношению: $x_k = b \cdot 2^{a(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Здесь a и b - фиксированные (но неизвестные) натуральные числа. Зашифрование происходит следующим образом. Первую букву сообщения заменяют числом согласно таблице 1 и складывают с x_1, потом также заменяют вторую букву и складывают с x_2 и т.д. Затем все суммы заменяют остатками от деления на 31, а остатки заменяют буквами согласно таблице 1. В результате получился текст

РПСУГНЦЫТДЗПФЕБТНЗЁДПЁЫСБТСКЖГНАКЛГХАКЖВТНЦЕБЧВЦКБННЦ

Найдите исходное сообщение, представляющее собой отрывок известного стихотворения, если известно, что в нем есть слово **ГРОМАДУ.**

Таблица 1

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И,Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь,Ъ	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

5. В Криптоландии договоры по аренде жилья могут заключаться на 3 и 10 лет, а по истечении срока аренды продлеваться на любой из указанных сроков. Расторжение договора до его окончания запрещено. Житель соседней Биномии хочет узнать, какие сроки аренды допустимы при таких условиях. Помогите ему в этом.

6. Найти число решений системы уравнений $\begin{cases} y + |x| = 2 \\ x + a|y| = 3 \end{cases}$ при всех возможных значениях параметра a.